ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Одобрено кафедрой
«Физика и химия»

ФИЗИКА

Задания на контрольные работы № 1и №2
с методическими указаниями для студентов 1 курса

направления: 270800.62 «Строительство»
(для всех профилей)

Москва 2014

Составители: канд. тех. наук, доц. Климова Т.Ф.

Рецензент: док. физ.-мат. наук, доц. Шулиманова З.Л.

Железнодорожный транспорт представляет собой отрасль народного хозяйства, в которой переплетаются и используются достижения и знания из самых различных областей науки и техники. Курс физики играет важную роль в теоретической подготовке современного инженера - транспортника. Решение физических задач способствует формированию у студентов инженерного мышления, без которого невозможна успешная работа на транспорте, промышленных предприятиях и стройках.

Цель настоящих методических указаний – оказать помощь студентам-заочникам в изучении курса физики. Предлагаемая работа состоит из двух частей, в каждой из них даны примеры решения задач, контрольные задания и общие методические указания.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В процессе изучения физики студент должен выполнить 2 контрольные работы. Решение задач в контрольных работах является проверкой степени усвоения студентом теоретического курса, а рецензии на работу помогают доработать и правильно освоить различные разделы курса физики. Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо внимательно ознакомиться с примерами решения задач по данной контрольной работе, уравнениями и формулами, приведенными в методических указаниях. В некоторых случаях преподаватель может дать студенту индивидуальное задание – задачи, не входящие в вариант студента.

ВЫБОР ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ:
Задачи выбираются по двум последним цифрам учебного шифра студента: **Номера первых двух задач определяются по последней цифре шифра;** **Номера третьей и четвертой задачи определяются предпоследней цифрой шифра;** **Номера пятой и шестой задач определяются последней цифрой суммы последней и предпоследней цифр шифра** **Например, при шифре 1012–ПГС -5231 – студент решает:** **в контрольной работе № 1 задачи 1, 11, 23, 33, 44, 54,**

в контрольной работе № 2 задачи 61, 71, 83, 93, 104, 114.

Правила оформления контрольных работ и решения задач:

1. Условия всех задач студенты переписывают полностью без сокращений.
2. Все значения величин, заданных в условии и привлекаемых из справочных таблиц, записывают для наглядности сокращенно (столбиком) в тех же единицах, которые заданы, а затем рядом осуществляют перевод в единицы СИ.
3. Все задачи следует решать в СИ.
4. В большей части задач необходимо выполнять чертежи или графики с обозначением всех величин. Рисунки надо выполнять аккуратно, используя чертежные инструменты; объяснение решения должно быть согласовано с обозначениями на рисунках.
5. Необходимо указать физические законы, которые должны быть использованы, и аргументировать возможность их применения для решения данной задачи.
6. С помощью этих законов, учитывая условие задачи, получить необходимые расчетные формулы.
7. Вывод формул и решение задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями.
8. Использованные в формулах буквенные обозначения должны быть согласованы с обозначениями, приведенными в условии задачи и на приведенном рисунке. Дополнительные буквенные обозначения следует сопровождать соответствующими объяснениями.
9. Получив расчетную формулу, необходимо проверить ее размерность.

Пример проверки размерности:

$$[v] = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{[м^3 \cdot кг^{-1} \cdot с^{-2}] \cdot [кг] \cdot [с^{-1}]} = м \cdot с^{-1}$$

10. Основные физические законы, которыми следует пользоваться при решении задач (вывод расчетных формул), приведены в каждом из разделов. Там же приведены некоторые формулы, которыми можно пользоваться без вывода.
11. После проверки размерности полученных формул проводится численное решение задачи.
12. Вычисления следует производить по правилам приближенных вычислений с точностью, соответствующей точности исходных числовых данных условия задачи. Числа следует записывать в стандартном виде, используя множитель 10, например не 0,000347, а $3{,}47 \cdot 10^{-4}$.
13. Каждая последующая задача должна начинаться с новой страницы.

14. В конце контрольной работы необходимо указать учебные пособия, учебники, использованные при ее выполнении, и дату сдачи работы и поставить подпись.
15. Если контрольная работа не допущена к зачету, то все необходимые дополнения и исправления сдают вместе с незачтенной работой. Исправления в тексте незачтенной работы не допускаются.
16. Допущенные к зачету контрольные работы с внесенными уточнениями предъявляются преподавателю на зачете. Студент должен быть готов дать во время зачета пояснения по решению всех выполненных задач.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Т. И Трофимова. Курс физики: Учебное пособие. М.: Академия,, 2008
2. Т. И. Трофимова Краткий курс физики. М.: Высшая школа, 2009
3. Т.И Трофимова. Сборник задач по курсу физики с решениями М.: Высшая школа. 2008

Дополнительная литература:

4. А.А. Детлаф. Курс физики. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 2000
5. В.Ф. Дмитриева Основы физики. М. Высшая школа, 2001
6. В.Н. Недостаев. Физика. Конспект лекций т. 1-2. – М., РГОТУПС, 2005
7. С. Е Мельханов Общая физика. Конспект лекций, М.: Высшая школа, 2001
8. В.М. Гладской Физика. Сборник задач с решениями, М.:Дрофа, 2004
9. Т.И. Трофимова Физика.. 500 основных законов и формул. М., Высшая школа, 2003
10. В. Ф. Дмитриева, В. Ф. Прокофьев. Основы физики. М.: Высшая школа, 2002
11. Физический энциклопедический словарь. М.: Российская энциклопедия, 2003
12. С.М. Кокин, В.А. Селезнев Физика на транспорте. М.: 1995

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Контрольная работа № 1 состоит из шести задач и охватывает следующие разделы физики

Задача № 1 – Физические основы механики

Задача № 2 - Динамика поступательного движения

Задача № 3 Статика. Условия равновесия тел

Задача № 4 – Электростатика

Задача № 5 – Постоянный электрический ток

Задача № 6 – Электромагнетизм

Студенты выполняют контрольную работу, выбирая номера задач по таблице 1.

Таблица 1.

Цифра по шифру	Номер задачи					
	1	2	3	4	5	6
1	1	11	21	31	41	51
2	2	12	22	32	42	52
3	3	13	23	33	43	53
4	4	14	24	34	44	54
5	5	15	25	35	45	55
6	6	16	26	36	46	56
7	7	17	27	37	47	57
8	8	18	28	38	48	58
9	9	19	29	39	49	59
0	10	20	30	40	50	60

ЗАДАНИЕ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

1.1. Кинематика поступательного движения материальной точки

Положение материальной точки в пространстве определяется с помощью радиус- вектора: $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$ где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы – орты, направленные по осям прямоугольной системы координат, x, y, z – координаты точки
Кинематическое уравнение движения материальной точки: $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$ где x(t), y(t), z(t) – функции, выражающие зависимость координат точки от времени t .
Средняя скорость: $<\vec{\sigma}> = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$,   где $\Delta\vec{r}$ - вектор перемещения за время Δt.   Средняя путевая скорость: $<\sigma.> = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, где Δs- путь, пройденный за время Δt.   Мгновенная скорость: $\vec{\sigma} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$
Среднее ускорение: $<\vec{a}> = \dfrac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t}$,   где $\Delta\vec{\sigma}$ – приращение скорости за время Δt.   Мгновенное ускорение: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ Ускорение при криволинейном движении: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$,   где $a_\tau = \dfrac{d\sigma}{dt}$- тангенциальная составляющая ускорения, $a_n = \dfrac{\sigma^2}{R}$- нормальная составляющая ускорения,   R - радиус кривизны.
Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2: $$s = \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t)dt.$$ Координаты материальной точки: $$x(t) = x(0) + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_x(t)dt.$$

1.2. Кинематика вращательного движения материальной точки

Средняя угловая скорость: $<\vec{\omega}.>=\dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$,   где $\Delta\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота за время Δt .   Мгновенная угловая скорость: $\vec{\omega}=\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ Линейная скорость: $\vec{\sigma}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=[\vec{\omega},\vec{r}\,]]$
Среднее угловое ускорение: $<\varepsilon>=\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$,   где $\Delta\vec{\omega}$ - приращение угловой скорости за время Δt.   Мгновенное угловое ускорение: $\vec{\varepsilon}=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ Связь тангенциального ускорения с угловым: $a_t = \varepsilon r$ Нормальное ускорение: $a_n=\dfrac{\sigma^2}{r}=\omega^2 r=\sigma\omega$ Полное ускорение при вращательном движении: $\vec{a}=\dfrac{d\vec{\sigma}}{dt}=[\vec{\varepsilon},\vec{r}\,]+[\vec{\omega},\vec{\sigma}]$ $$a=r\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$$
Угол поворота за время t: $\varphi=\varphi(0)+\int_{t_1}^{t_2}\omega(t)dt$

1.3. Основные уравнения прямолинейного движения и движения по окружности

Равномерное прямолинейное движение: $\vec{a}=0,\vec{a}_\tau=0,\vec{a}_n=0$ $\vec{\upsilon}$ = const; $\Delta\vec{r}=\vec{\upsilon}t; s=\upsilon t$; $X = x_0 + \upsilon t$	Равномерное движение по окружности: $\varepsilon = 0$; $a_n = v^2/R = \omega^2 R = \omega v$: $a = a_n$ $\omega = \Delta\varphi / \Delta t = 2\pi\nu = 2\pi/T$; $v = \omega R$; $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $s = R\varphi$; $\varphi = 2\pi n$; $T=t/n$; $\nu = n/t$ T^{-1};
Равнопеременное прямолинейное движение: a_t=const	Равнопеременное движение по окружности: ε = const;

$a_n=0$; $a=const$; $\upsilon=\upsilon_0+at$; $<\upsilon>=\dfrac{\upsilon_0+\upsilon}{2}$;v $s=\upsilon_0 t+\dfrac{at^2}{2}$; $s=\dfrac{\upsilon^2-\upsilon_0^2}{2a}$ $x=x_0+\upsilon_0 t+\dfrac{at^2}{2}$	$a_t=\varepsilon r$; $a_n=\dfrac{\sigma^2}{r}=\omega^2 r=\sigma\omega$ $a=r\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$ $\omega=\omega_0+\varepsilon t$; $<\omega>=\dfrac{\omega_0+\omega}{2}$; $\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\dfrac{\varepsilon t^2}{2}$; $\varphi=\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{2\varepsilon}$ $s = r\varphi$; $\varphi= 2\pi n$

Пример 1. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось х) имеет вид $x = A + B\,t + C\,t^3$, где $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Для момента времени $t_1 = 2$ с определить: 1) координату x_1 точки; 2) мгновенную скорость V_1; 3) мгновенное ускорение a_1.

Решение. Найдем координату точки, для которой известно кинематическое уравнение движения, подставив в уравнение движения вместо t заданное значение t_1:

$$x_1 = A + B\,t_1 + C\,t_1^3; \qquad x_1 = 4 \text{ м}.$$

Мгновенную скорость V в произвольный момент времени t найдем, продифференцировав координату x по времени:

$$V = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Тогда в заданный момент времени мгновенная скорость:

$$V_1 = B + 3Ct^2_1;\ V_1 = -4 \text{ м/с}.$$

Знак минус указывает на то, что в момент времени $t_1 = 2$ с точка движется в отрицательном направлении координатной оси.

Мгновенное ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координаты по времени:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 6Ct.$$

Мгновенное ускорение в заданный момент времени равно:

$$a_1 = 6Ct_1;\ a_1 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси.

Пример 2. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выражаемому формулой $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$ (рис. 1). Найдите по величине и направлению полное ускорение точки, находящейся на расстоянии R = 0,1 м от оси вращения, для момента времени t_1 = 4 с.

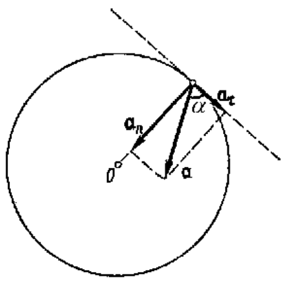


Рис. 1

Условие:

$\varphi=10+20t-2t^2$;

R=0,1 м;

t_1=4 с;

a - ? α - ?

Решение. Точка вращающегося тела описывает окружность. Полное ускорение точки определяется геометрической суммой тангенциального и нормального ускорения:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \qquad (1)$$

Тангенциальное и нормальное ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами:

$$a_t = \varepsilon R; \qquad (2)$$

$$a_n = \omega^2 R, \qquad (3)$$

где ω - угловая скорость тела; ε - его угловое ускорение; R - расстояние от оси вращения.

Подставляя выражения a_t и a_n в формулу (1) находим:

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (4)$$

Угловая скорость вращающегося тела равна первой производной от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20 - 4t.$$

В момент времени $t = 4$ с угловая скорость $\omega = 4$ с$^{-1}$.

Угловое ускорение вращающегося тела равна первой производной от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -4\ c^{-2}.$$

Подставляя найденные и заданные значения в формулу (4) получим:

$$a = 1{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Направление полного ускорения можно определить, если найти углы, которые векторы ускорения составляют с касательной к траектории или нормалью к ней:

$$\cos\alpha = \frac{a_\tau}{a}. \qquad (5)$$

По формулам (2) и (3) найдем значения a_t и a_n:

$$a_t = -0{,}4\ /c^2; \qquad a_n = 1{,}6\ /c^2\,.$$

Подставив эти значения и значения полного ускорения в формулу (5), получим:

$$\cos\alpha = 0{,}242;\ \alpha = 76^0.$$

ЗАДАЧИ

1. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением S= 2t – 3t$_2$ + 4t^3. Найти 1) зависимость скорости и ускорения от времени; 2) расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение через 2 с после начала движения.

2. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением S = A – 3t + 2t^2. Найти среднюю скорость и средне ускорение за первые четыре секунды движения.

3. Определить радиус маховика, если при вращении скорость точек на ободе 6 м/с, а точек, находящихся на 15 см ближе к оси 5,5 м/с.

4. Найти линейную скорость и центростремительное ускорение точек на поверхности земного шара на экваторе и на широте 60^0. Средний радиус земного шара 6400 км

5. Колесо, вращаясь равнозамедленно за 1 минуту уменьшило частоту с 300 об/мин до 180 об/мин. Найти угловое ускорение и число оборотов колеса за это время.

6. Вентилятор вращается с частотой 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75оборотов. Какое время прошло с момента выключения вентилятора до полной остановки.

7. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны 100. Закон движения автомобиля выражается уравнением $S = 100 + 10t - 0{,}5t^2$. Найти скорость автомобиля, его тангенциальное, нормальное и полное ускорение в конце пятой секунды.

8. Материальная точка движется по окружности, радиус которой 20 м. Зависимость пути пройденного точкой от времени выражается уравнением $S = t^3 + 4t^2 - t + 8$. Определить пройденный путь, угловую скорость и угловое ускорение точки через 3 с от начала движения.

9. Материальная точка движется по окружности радиуса 1 м согласно уравнению $S = 8t - 0{,}2t^2$. найти скорость, тангенциальное, нормальное ускорение в момент времени 3 с.

10. Тело вращается равноускоренно с начальной скоростью 5 $с^{-1}$ и угловым ускорением 1 $с^{-2}$. Сколько оборотов делает тело за 10 с?

ЗАДАНИЕ 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Импульс материальной точки**:** $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$ Импульс системы материальных точек: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i$
Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки): $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \vec{F}dt = d\vec{P}; \vec{F} = m\vec{a}$ Изменение импульса материальной точки: $\mathbf{\Delta}\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}$ (t)dt.
Главный вектор внешних сил**:** $\vec{F} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \vec{F}_i$ 1
Основной закон динамики поступательного движения твердого тела: $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$.
Третий закон Ньютона: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$
Закон сохранения импульса для замкнутой системы: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i const$ где n –число материальных точек (или тел), входящих в систему.

2.2 Закон сохранения импульса. Механическая работа, мощность, КПД. Кинетическая и потенциальная энергия

Закон сохранения импульса для замкнутой системы: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i const$ где *n* - число материальных точек (или тел), входящих в систему.
Элементарная работа, совершаемая постоянной силой: δA= $\vec{F}d\vec{r}$ $\delta A = F_r dr = Fdr\cos\alpha,$ где F_r -проекция силы на направление перемещения dr; α – угол между направлением силы и перемещения.

Работа, совершаемая переменной силой на пути: А = $\int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 Fdr\cos\alpha$ Работа силы тяжести вблизи поверхности Земли: $A = mgh$; Работа силы упругости: $A = kx^2/2$. Работа силы трения: $A = -F_t \Delta r$. Мгновенная мощность: $N = \frac{dA}{dt}$ $\quad N = Fv = F_r v = Fv\cos\alpha$ Коэффициент полезного действия (КПД): $\eta = \frac{A_n}{A_з} = \frac{N_n}{N_з}(\%)$ $A_n, A_З, N_n, N_З$ – соответственно полезные и затраченные работа и мощность
Кинетическая энергия: $W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$
Связь между консервативной силой, действующей на тело в данной точке, и потенциальной энергией частицы: $\vec{F} = -grad\ W_n$; Потенциальная энергия частицы в поле центральных сил: $$W_п(r) = \Delta A = -\int_1^2 \vec{F}_c(\vec{r})d\vec{r},$$ предположив $W_n(\infty) = 0$, получим $W_n(\mathbf{r}) = -\int_\infty^0 \vec{F}_c(\vec{r})d\vec{r} = \int_0^\infty \vec{F}_c(\vec{r})d\vec{r}$. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r: $W_n = G\frac{m_1m_2}{r}$ Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести Земли: $W_n = -G\frac{Mm}{r}$ где $r = R + h$ - расстояние от центра Земли до центра масс тела. Потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести ($h<<R$): $W_n = mgh$, где g – ускорение свободного падения.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела: $W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{\sigma^2 V}{2E}$ где k - коэффициент жесткости, x – смещение; σ – нормальное напряжение; *E* – модуль Юнга; V – объем.

2.3 Динамика вращательного движения

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения: $J = mr^2,$ где *m* –масса, *r* –расстояние до оси вращения. Момент инерции системы материальных точек (тела): $J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, где r_i – расстояние *i*–й материальной точки массой m до оси вращения. В случае непрерывного распределения масс: $J = \int_{(m)} r^2 dm$. Теорема Штейнера: момент инерции тела массой *m* относительно неподвижной оси вращения, непроходящей через центр масс и параллельный оси вращения: $J = J_z + mr^2,$ где J_z –момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс, *r*- расстояние между осями.

2.4. Момент инерции тел правильной геометрической формы относительно неподвижной оси вращения

Форма тела	Ось вращения проходит через:	Момент инерции
Однородный шар радиусом R и массой m	Центр масс	$0{,}4mR^2$
Круглый однородный цилиндр или диск радиусом R и массой m	Центр масс перпендикулярно плоскости основания	$0{,}5mR^2$
Тонкий обруч или кольцо радиусом R и массой m	центр масс перпендикулярно плоскости обруча	mR^2
Однородный тонкий стержень длиной L и массой m	центр масс стержня перпендикулярно стержню	$mL^2/12$
Однородный тонкий стержень	конец стержня	$mL^2/3$

длиной L и массой m	перпендикулярно стержню	

2.5 Момент силы, момент импульса. Основное уравнение динамики вращательного движения

Момент силы относительно произвольной точки: $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$. Модуль момента силы: $M = Fl$, где $l = r \cdot \sin\alpha$ – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения)
Момент импульса твердого тела относительно оси вращения: $$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_{i,} (m_i \vec{\upsilon}_i);$$ $$\vec{L} = J\vec{\omega}$$ где $\vec{r}_i$ –радиус-вектор отдельной i - й частицы; $m_i \vec{\upsilon}_i$ - импульс этой частицы; J- момент инерции тела относительно оси; $\vec{\omega}$ – угловая скорость
Основное уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$; $M = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon$, где ε – угловое ускорение; J_z-момент инерции тела относительно оси
Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы $$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} J_i \vec{\omega}_i = const$$
Работа при вращении тела: $\Delta A = M_z \Delta\varphi$ где $\Delta\varphi$ - угол поворота тела; M_z - момент силы относительно оси
Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: $$W_{kb} = \frac{J\omega^2}{2}$$ где J– момент инерции тела относительно оси, ω - его угловая скорость Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения: $$W_k = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$ где *m*– масса тела; v_c - скорость центра масс тела; *J* – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; *ω* –угловая скорость тела

Пример 3. Автомобиль массой m = 1000 кг движется вверх по наклонной плоскости с уклоном α = 0,1, развивая на пути S = 200 м скорость $v_к$ = 54 км/ч. Коэффициент трения μ = 0,05. Определить силу тяги двигателя

Условие:

m =1000 кг;
S=200 м;
a=0,1 м/с^2;
μ=0,05;
v_0 =0;
$v_к$ =54км/ч = 15м/с;
F - ?

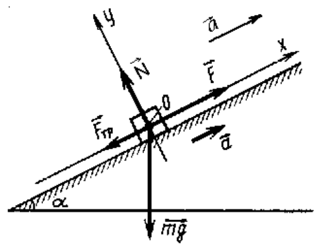


Рис. 3

Решение. Автомобиль движется равноускоренно, причем начальная скорость равна нулю. Выберем ось x, расположенную вдоль наклонной плоскости, ось y – перпендикулярно ей (рис. 3).

На автомобиль действует четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F_T}=m\boldsymbol{g}$, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}$, сила тяги **F** и сила трения $\mathbf{F_{TP}}$. Запишем основной закон динамики:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{TP}.$$

Это уравнение в проекциях на оси координат

$$\textit{на ось x} \quad ma = F - mg\sin\alpha - F_{TP},$$
$$\textit{на ось y} \quad 0 = N - mg\cos\alpha,$$
$$F_{TP} = \mu N.$$

Выразим из этих уравнений силу тяги F

$$F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + ma.$$

Ускорение на этом участке равно:

$$a = (v_k^2 - v_0^2)/(2s) = v_k^2/(2s).$$

Найдем силу тяги двигателя на этом участке:

$$F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{2s} = m(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + \frac{v^2}{2s}) =$$
$$1000(0.98+0,50+0,56) = 2043\ H$$

Пример 4. Маховик, массу которого m = 5 кг можно считать распределенной по ободу радиуса r = 20 см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр с частотой n = 720 мин$^{-1}$. При торможении маховик останавливается через Δt = 20 с. Определить тормозящий момент M и число оборотов N, которое сделает маховик до полной остановки.

Условие:

m = 5 кг
r = 20см =0,20 м
n =720 мин$^{-1}$ = 12 с$^{-1}$
Δt =20 с
M - ? N - ?

Решение. Если тормозящий момент постоянен, то движение маховика равнозамедленное, и основное уравнение динамики вращательного движения можно записать в виде:

$$J\Delta\vec{\omega} = \vec{M}\Delta t \qquad (1)$$

где $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$ - изменение угловой скорости за интервал времени Δt; M – искомый тормозящий момент.

Число оборотов N может быть найдено как кинематически, так и по изменению кинетической энергии, равному работе совершаемой тормозящей силой.

Векторному уравнению (1) соответствует скалярное уравнение

$$J\Delta\omega = M\Delta t, \qquad (2)$$

где $\Delta\omega$, M - модули соответствующих векторов.

Из условия задачи следует, что

$$\Delta\omega = |\omega - \omega_0| = \omega_0 = 2\pi n \qquad (3)$$

Поскольку масса маховика распределена по ободу, момент инерции

$$J = mr^2 \qquad (4)$$

Подставляя выражения (2), (3) в (1) получим

$$mr^2 2\pi n = M\Delta t.$$

Откуда $M = 2\pi nmr^2/\Delta t$ = 0,75 Н·м.

Векторы $\vec{M}, \Delta\vec{\omega}$ направлены в сторону противоположную вектору $\vec{\omega}_0$.

Угловое перемещение, пройденное маховиком до остановки

$$\varphi = \omega_0\Delta t - \varepsilon\Delta t^2/2. \qquad (5)$$

Учитывая, что $\omega = \omega_o - \varepsilon\Delta t = 0$ преобразуем выражение (6)

$$\varphi = \omega_0\Delta t/2.$$

Так *как* $\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi n$, где N - число оборотов, которое делает маховик до полной остановки, окончательно получим

$$N = nt/2 = 120 \text{ об.}$$

ЗАДАЧИ:

11. Сплошной шар массой 1 кг и радиусом 5 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Закон вращения шара выражается уравнением $\varphi = 10 + 5t - 2t^2$. В точке наиболее удаленной от оси вращения, на шар действует сила, касательная к поверхности. Определить эту силу и тормозящий момент.

12. Сплошной цилиндр массой 0.1 кг катится без скольжения с постоянной скоростью 4 м/с. Определить кинетическую энергию цилиндра, время его до остановки, если на него действует сила трения 0,1 Н.

13. Сплошной шар скатывается с наклонной плоскости, длина которой 1 м и угол наклона 30^0. Определить скорость шара в конце наклонной плоскости. Трение шара о плоскость не учитывать.

14. Маховик, имеющий форму диска массой 10 кг и радиусом 0,1 м, был раскручен до частоты 120 мин$^{-1}$. Под действием силы трения диск остановился через 10 с. Найти момент силы трения, считая его постоянным.

15. Обруч и диск скатываются с наклонной плоскости, составляющий угол с горизонтом 30^3. Чему равны их ускорения в конце спуска? Силой трения пренебречь.

16. Масса снаряда 10 кг, масса ствола орудия 100 кг. При выстреле снаряд получил кинетическую энергию 1,5 МДж. Какую кинетическую энергию получит ствол орудия вследствие отдачи.

17. Брусок скатывается равноускоренно с наклонной плоскости, составляющий с горизонтом угол 30^0. Определить скорость бруска у основания наклонной плоскости, если коэффициент трения равен 0,1, высота наклонной плоскости 2 м.

18. Автомобиль массой 1 т поднимается по шоссе с углом наклона 30^0 под действием силы тяги 7 кН. Найти ускорение автомобиля. считая, что сила сопротивления не зависит от скорости и составляет 0,1 силы нормальной реакции опоры.

19. Вагонетку поднимают по эстакаде с углом наклона 30^0 к горизонту. Масса вагонетки 2 т. Определить силу натяжения троса, если вагонетка движется с ускорением 0,2 м/с^2. Коэффициент трения равен 0,05

20. На концах нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены тела массой 240 г каждое. Какой массы надо положить добавочный груз на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за 4 с путь 160 см?

ЗАДАНИЕ 3. СТАТИКА. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ

3.1 Условие равновесия тела

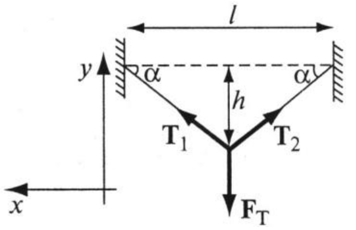
Векторная сумма всех сил, действующих на тело равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0 .$$

Векторная сумма моментов всех сил, действующих на тело равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = 0 .$$

Пример 5. Концы нити закреплены на расстоянии l . Посередине привязан груз массой m, при этом величина прогибания нити h . Определите силу натяжения нити T.



Решение

Условие равновесия для точки в векторной форме имеет вид:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_T = 0$$

где T_1 и T_2 – силы натяжения нитей, а $F_T = mg$ - сила тяжести груза (рис).
Равенство проекций сил на горизонтальное направление требует равенства проекций сил натяжения нити:

$$T_1 cos\alpha - T_2 cos\alpha = 0, \text{ откуда } T_1 = T_2$$

Для равновесия необходимо, чтобы сумма проекций сил на вертикальное направление было равна нулю:

$$2T\sin\alpha - mg = 0,$$

где $\sin\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{\dfrac{l^2}{4} + h^2}} = \dfrac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}}$

Следовательно $T = \dfrac{mg}{2\sin\alpha} = \dfrac{mg\sqrt{l^2 + 4h^2}}{4h}$

ЗАДАЧИ

21. Фонарь массой 17 кг подвешен к середине троса длиной 20 м. Трос провисает на 0.5 м. Определить силу натяжения троса. Как изменилась бы эта сила, если бы стрела прогиба была вдвое меньше?

22. Канат, к которому привязан аэростат, образует с поверхностью земли угол 60^0. Определить силу натяжения каната и горизонтальную силу ветра, действующую на аэростат, если подъемная сила равна 8,7 кН.

23.К стержню длиной 120 см, расположенного горизонтально, приложены три в вертикальной плоскости три параллельные силы, у левого конца стержня 20 Н, в середине 80 Н и у правого конца 90 Н.Чему равна равнодействующая этих сил и где находится точка ее приложения.

24. Два однородных цилиндра соединены между собой так, что оси их составляют прямую линию. Первый цилиндр имеет высоту 20 см и площадь сечения 9 см^2. второй высоту 12 см и площадь сечения 5 см^2. Найдите расположения центра тяжести системы.

25. Стержень цилиндрической формы длиной 40 см состоит наполовину своей длины из свинца и на половину из меди. Найти центр тяжести стержня. Плотность свинца 11,3 г/см^3, плотность меди – 8,9 г/см^3.

26. Два шара одинакового объема алюминиевый и медный скреплены в точке касания. Радиус шаров 5 см. Плотность алюминия – 2,7 г/см^3, плотность меди – 8,9 г/см^3.

27. На конце стержня длиной 30 см прикреплен шар, радиус которого 6 см, а центр лежит на продолжении оси стержня. Где находится центр тяжести этой системы, если массы стрежня и шара одинаковы?

28. Фонарь массой 20 кг подвешен над улицей на двух одинаковых тросах, угол между которым равен 120^0. найти силу натяжения троса.

29. К стене прислонена лестница массой 30 кг. Центр тяжести лестницы находится на расстоянии 1/3 длины от ее верхнего конца. Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине лестницы, чтобы верхний конец ее не оказывал давления на стену. Угол между лестницей и стеной равен 30^0. Трением пренебречь

30. Три человека несут однородную металлическую плиту, представляющую равнобедренный треугольник. Основания треугольника имеет длину 0.6 м, высота треугольника 1,25 м, толщина плиты 4 см, плотность материала плиты 3,6 г/см^3. Какая нагрузка приходится на каждого человека, если они несут плиту за вершины треугольника?

ЗАДАНИЕ 4. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

4.1.Электрический заряд. Закон Кулона

Закон сохранения электрических зарядов В замкнутой системе: $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_1 = const$
Дискретность электрических зарядов: $Q = ne$, где n= 1, 2... $e = \pm 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд
Закон Кулона: в векторной форме: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^3}\vec{r}$ в скалярной форме: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}$

где F_{12} - сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме; r - расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф·/м - электрическая постоянная
Линейная плотность зарядов: $\tau = \frac{dQ}{dl}$ Поверхностная плотность зарядов: $\sigma = \frac{dQ}{ds}$ Объемная плотность зарядов: $\rho = \frac{dQ}{dV}$

4.2. Напряженность и потенциал электростатического поля, связь между ними. Принцип суперпозиции

Напряженность электростатического поля: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$ где $\vec{F}$ - сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля. Потенциал электростатического поля: $\varphi = \frac{W_n}{Q_0}; \varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}$ где W_n - потенциальная энергия заряда Q_0; A_∞ - работа перемещения заряда из данной точки поля за его пределы.
Принцип суперпозиции: Напряженность и потенциал результирующего поля, создаваемого системой точечных зарядов, равны соответственно: $$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} E_i; \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i ,$$ где E_1 и φ_i - напряженность и потенциал, создаваемый в данной точке поля зарядом Q_i.
Разность потенциалов между двумя точками электростатического поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_0}$$

где A_{12} – работа поля по перемещению заряда между двумя **точками поля**

Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$$\vec{E} = -grad\varphi \; ; \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 \mathrm{Edl}\cos\alpha = \int_1^2 \mathrm{E_l dl},$$

где $\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} =$ - линейный интеграл напряженности электростатического поля

Однородное электрическое поле: *E = const;* $\quad E = \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$; $\Delta\varphi = Ed$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = = \oint \mathrm{Edl}\, cos\,\alpha = \oint \mathrm{E_l dl} = 0$$

где E_l - проекция вектора E на направление элементарного перемещения *dl*.
Интегрирование производится по любому замкнутому контуру

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда из точки 1 в точку **2**: $A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$;

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = = Q_0 \int_1^2 \mathrm{E_l dl}.$$

Работа по перемещению точечного заряда Q в поле точечного заряда Q_0:

$$A_{12} = \frac{QQ_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{QQ_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

Работа по перемещению заряда в однородном электростатическом поле:

$$A_{12} = QE\cos\alpha$$

Пример 6. В вершинах квадрата находятся одинаковые по величине одноименные заряды (рис 9). Определить величину заряда q_0, который надо поместить в центр квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Будет ли это равновесие устойчивым?

Условие:

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$;

q_o - ?

Решение. Рассмотрим силы, действующие на любой

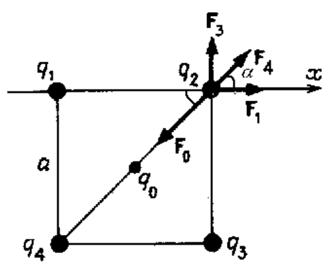


Рис. 9

из зарядов в вершинах, например на заряд q_2 (рис. 9). Со стороны зарядов q_1, q_2, q_3 на него действуют силы F_1, F_3, F_4 соответственно, причем $F_1 = F_3 = kq^2/a^2$, где а – сторона квадрата, $F_4 = kq^2/2a^2$. Сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_0 равна $F_0 = 2kqq_0/a^2$. Условие равновесия заряда имеют вид

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_0 = 0, \qquad (1)$$

В проекции на ось x уравнение (1) запишется

$$F_1 + F_4 \cos\alpha - F_0 \cos\alpha = 0,$$

или $$\frac{kq^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}kq^2}{4a^2} - \frac{\sqrt{2}kqq_0}{a^2} = 0.$$

Откуда $q_0 = q(1 + \frac{\sqrt{2}}{4})/\sqrt{2} = 0{,}9\, q.$

Согласно теореме Ирншоу, система неподвижных точечных зарядов, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, не может находиться в состоянии устойчивого равновесия лишь под действием кулоновских сил.

Пример 7. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор параллельно пластинам со скоростью $v_0 = 1{,}0 \cdot 10^{6}$ м/с. Длина конденсатора L=1,0 см, напряженность электрического поля в нем E =5,0·10^3 В/м. Найти скорость v электрона при вылете из конденсатора и его смещение y.

Условие:
$v_0 = 1{,}0 \cdot 10^6$ м/с;
L = 1,0 см = 0,01 м;
$E = 5{,}0 \cdot 10^3$ В/м;
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл;
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$кг;
v - ? y - ?

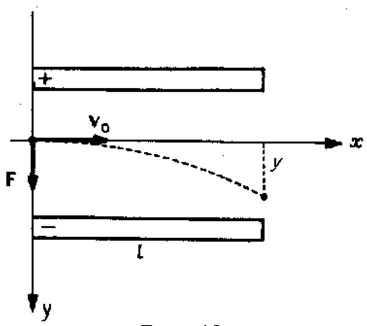


Рис. 10

Решение. Сила тяжести, действующая на электрон, равна $F_t = mg = 9{,}1 \cdot 10^{-30}$ Н.

Кулоновская сила равна $F = eE = 8 \cdot 10^{-16}$ Н, т. е. кулоновская сила много больше, чем сила тяжести. Поэтому можно считать, что движение электрона происходит только под действием кулоновской силы.

Запишем для электрона второй закон Ньютона

$$ma = F, \text{ где } F = eE.$$

Направление осей координат показано на рис. 10. Движение электрона вдоль оси x – равномерное со скоростью v_0, так как проекция силы F на ось x равна нулю, следовательно время, в течении которого электрон пролетает между пластинами конденсатора $t = L/v_0$.

Движение электрона вдоль оси y – равноускоренное под действием силы F, направленное вдоль этой оси.

Ускорение $a_y=a=eE/m$.

Начальная скорость и смещение электрона вдоль оси y равны: $v_y = 0$

$$y=\frac{at^2}{2}=\frac{eEL^2}{2mv_0^2}= \quad 4{,}4\cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Скорость электрона в момент вылета v, направленная по касательной к траектории его движения равна:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \quad v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2},$$

где $v_x = v_0$, $v_y = at$.

Окончательно получаем: $v=\sqrt{v_0^2+\frac{eEL^2}{2mv_0^2}} = 8{,}7\cdot 10^6$ м/с.

Угол между вектором скорости и осью x определяется по формуле

$$\alpha = arctg\frac{v_e}{v_x}=arctg\frac{eEL}{mv_0^2}== 83{,}5^0.$$

ЗАДАЧИ

31. Два точечных заряда находятся в вакууме на некотором расстоянии друг от друга. Если расстояние между ними уменьшить на 0,5. то сила взаимодействия увеличится в 4 раза. Найти первоначальное расстояние между зарядами

32. Три отрицательных заряда 3 нКл каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд надо поместить в центр треугольника, чтобы система находилась в равновесии?

33. Четыре одинаковых положительных заряда 3,3 нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной 10 см. Найти силу, действующую со стороны трех зарядов на четвертый.

34. Металлическому шару радиусов 3 см сообщили заряд 16 нКл. Найти поверхностную плотность заряда шара и напряженность поля в точках, удаленных от центра шара на 3 и 4 см.

35. В трех вершинах квадрата со стороной 10 см находятся одинаковые положительные заряды 5 нКл каждый. Найти напряженность поля в четвертой вершине.

36. Воздушный шар диаметром 20 см от трения о воздух заряжается до потенциала 300 кВ. С какой силой действует на шар электрическое поле Земли, если его напряженность равна 130 В/м.

37. Две пластины площадью 200 см^2 каждая погружены в масло с диэлектрической проницаемостью 2,2 и подключены к батарее, разность потенциалов на зажимах которой равна 200 В. Какую работу необходимо совершать, чтобы после отключения батареи уменьшить расстояние между пластинами от 5 см до 1 см?

38. Конденсатор с воздушной прослойкой, заряженный до разности потенциалов 800 В. соединяется параллельно с одинаковым по размерам незаряженным конденсатором с диэлектрической прослойкой. Какова диэлектрическая проницаемость диэлектрика, если после этого соединения разность потенциалов установилась 100 В.

39. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно к батарее с постоянной ЭДС. Один из них заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемость равной 4. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в этом конденсаторе.

40. Конденсатору емкостью 2 мкФ сообщен заряд 1 мКл. Обкладки конденсатора соединили проводником. Найти количество теплоты, выделенной проводнике при разрядке конденсатора и разность потенциалов между обкладками конденсатора до разрядки.

ЗАДАНИЕ 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

5.1. Электрический ток, сила и плотность тока

Сила тока $I = \dfrac{dQ}{dt}$

Единица силы тока - 1 А (ампер)

Сила постоянного тока: $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = const$

Плотность тока: $j = \dfrac{dI}{dS} = \dfrac{dQ}{dt \cdot dS}$

Единица плотности тока - 1 А/м^2

Заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время dt,:

$$dQ = ne\langle v\rangle Sdt,$$

где n и e – концентрация и заряд носителей тока,

$\langle v\rangle$ - средняя арифметическая скорость упорядоченного движения электронов

Сила тока: $I = ne < \vec{v} > S$

Плотность тока: $\vec{j} = ne < \vec{v} >$

5.2. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение

ЭДС: $\varepsilon = \frac{A_{cm}}{Q_o}$,

где A_{cm} - работа сторонних сил по перемещению положительного заряда Q_o

Работа сторонних сил $\vec{F}_{cm}$ по перемещению заряда Q_0 на замкнутом участке пути:

$$A = \oint \vec{F} d\vec{l}_{cm} = Q_0 \oint \vec{E} d\vec{l} \,,$$

где $\vec{E}$ - напряженность поля сторонних сил.

ЭДС, действующая в цепи,: $\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{l}$

ЭДС на участке цепи $\varepsilon = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}$

Сила, действующая на заряд в проводнике:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cm} + \vec{F}_e = Q_0 (\vec{E}_{cm} + \vec{E})$$

Работа результирующей силы на участке 1-2 зарядом Q_0:

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} + Q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = Q_0 \varepsilon_m + Q_0 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Для замкнутой цепи: $A = Q\varepsilon$

Напряжение на участке 1-2: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$

5.3. Сопротивление проводников

Сопротивление однородного линейного проводник длиной l и площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

где ρ - удельное электрическое сопротивление

Единица измерения сопротивления – Ом

Единица измерения удельного сопротивления – Ом·м

Электрическая проводимость: $G = \frac{1}{R}$

Единица измерения электрической проводимости – См (сименс)

Удельная электропроводимость: $\gamma = \frac{1}{\rho}$

Единица измерения удельной электропроводности – См$^{-1}$

Зависимость сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

$$R = R_0\ (1 + \alpha t)\ ,$$

где α - температурный коэффициент сопротивления, K^{-1}, t – температура, ^0C.

5.4. Последовательное и параллельное соединение проводников

Соединение	Последовательное	параллельное
Постоянная величина	$I_1 = I_2 = \ldots = I_n$ I=concs	$U_1 = U_2 = \ldots U_n$ U=const
Суммируемая величина	Напряжение $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$	сила тока $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$
Результирующее Сопротивление	$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$	$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$ $G = \sum^{n} i = 1 G_i$
	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_2}{R_1}$	$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$

5.5. Закон Ома для однородного участка и замкнутой цепи.

Закон Ома для однородного участка цепи (не содержащего источника тока):

$$I = \frac{U}{R}\ ,$$

Закон Ома в дифференциальной форме: $j = \gamma E, \vec{j} = \gamma \vec{E}$

Закон Ома для замкнутой цепи: $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$

где R –сопротивление внешней цепи,

r – внутреннее сопротивление источника тока.

Напряжение на внешней цепи:

$$U = IR = \varepsilon - Ir$$

Ток короткого замыкания: $I_{кз} = \dfrac{\varepsilon}{r}$
Закон Ома для батареи последовательно соединенных элементов: $$I = \frac{n\varepsilon}{R + nr}$$ где *n*- число элементов в батарее
Закон Ома для батареи параллельно соединенных элементов: $$I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{n}}$$ где n – число элементов в батарее
Закон Ома для смешанного соединения элементов в батарею: $$I = \frac{k\varepsilon}{R + \frac{kr}{n}}$$ где *k*- число ветвей в батарее, *n* – число элементов в ветви.
Закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщенный закон Ома): $$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}$$ где ε_{12} - действующая на участке 1-2 ЭДС, $\varphi_1 - \varphi_2$- разность потенциалов, приложенная к концам проводника.

5.6. Анализ обобщенного закона Ома

1	Источника тока нет: $\varepsilon_{12} = 0$	Из ОЗО: $I = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \dfrac{U}{R}$	Закон Ома для однородного участка цепи
2	Цепь замкнута $\varphi_1 = \varphi_2$	Из ОЗО: $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$ где *R*- сопротивление всей цепи	Закон Ома для замкнутой цепи
3	Цепь разомкнута: *I=0*	Из ОЗО $\varepsilon_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$:	ЭДС в разомкнутой цепи равна разности потенциалов на ее концах

5.7. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Первое правило Кирхгофа:

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю: $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$

Второе правило Кирхгофа:

В любом замкнутом контуре: $\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$

5.8. Работа и мощность тока

Элементарная работа электрического тока:

$$dA = Udq = IUdt = I^2Rdt = \frac{U^2}{R}dt$$

Работа электрического тока:

$$A = \int_{e_1}^{e_2} IUdt = \int_{e_1}^{e_2} I^2Rdt = \int_{e_1}^{e_2} \frac{U^2}{R}dt$$

Единица работы – Дж (джоуль)
Внесистемная единица работы 1квт·ч= 3,6 МДж=.3,6.10^6 Дж

Работа постоянного электрического тока:

$$A = Uq = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$$

Мощность электрического тока:

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

Единица мощности – Вт (ватт)

Закон Джоуля - Ленца:

dQ= $Udq = IUdt = I^2Rdt = \frac{U^2}{R}dt$

Закон Джоуля –Ленца в интегральной форме:

$$Q == \int_{e_1}^{e_2} IUdt = \int_{e_1}^{e_2} I^2Rdt = \int_{e_1}^{e_2} \frac{U^2}{R}dt$$

Закон Джоуля – Ленца для постоянного тока $$Q = Uq = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$$
Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме: $$w = \rho j^2 = iE = \gamma E^2,$$ где $w = \frac{dQ}{dVdt}$ - удельная тепловая мощность тока
Коэффициент полезного действия источника тока (КПД): $$\eta = \frac{P_{пол}}{P_{затр.}}\% = \frac{R}{R+r}\% = \frac{U}{\varepsilon}\%$$

Пример 8. Найти сопротивление R , железного стержня диаметром d = 1 см, если масса стержня m = 1 кг.

Условие:

d = 1 см = 0,01 м

v = 1 кг

ρ=0,087 мкОм.м=8,7.10^{-8} Ом$\cdot$м.

$\rho_{ж}$=7,7$\cdot$10^3 кг/м^3

R -?

Решение:

-Сопротивление стержня определяется по формуле

$$R = \rho\frac{l}{S},$$

где ρ удельное сопротивление железа, l, S -длина стержня и площадь поперечного сечения.

Масса проволоки

$$m = \rho_{ж}V = \rho_{ж}Sl,$$

где V - объем стержня, $\rho_{ж}$- плотность стали.

Откуда длина стержня равна:

$$l = \frac{m}{S\rho_{ж}} = \frac{4m}{\pi d^2\rho_{ж}},$$

поскольку площадь поперечного сечения стержня $S = \frac{\pi d^2}{4}$

Тогда сопротивление стержня равно:

$$R = \rho \frac{16m}{\pi^2 d^2 \rho_{ж}} = 18 мОм$$

ЗАДАЧИ

41. По медному проводнику сечением 0,17 мм^2 течет ток 0,025 А. Определить какая сила действует на каждый электрон со стороны электрического поля. Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

42. Параллельно амперметру, сопротивление которого 0.03 ОМ включен медный проводник длиной 10 см и диаметром 1,55. Амперметр показывает ток 0,4 А. Какова сила тока в цепи? Удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом$\cdot$м.

43. Каким должно быть сопротивление шунта, чтобы при его подключении к амперметру с внутренним сопротивлением 0,018 Ом предельное значение измеряемой силы увеличилось в 10 раз?

44. Вольтметр имеет сопротивление 2000 Ом и измеряет напряжение 100 В. Какое нужно поставить добавочное сопротивление, чтобы измерить напряжение 220 В.

45. К сети с напряжением 120 В присоединяются два сопротивления. При их последовательном соединении ток равен 3 А. а при параллельном – общий ток равен 16 А. Чему равны сопротивления

46. Четыре электрических лампочки, рассчитанные на напряжение 3 В и силу тока 0,3 А каждая, надо включить параллельно и питать от источника напряжением 5,4 В. Какое дополнительное сопротивление надо включить последовательно для нормальной работы ламп?

47. При замыкании источника электрического тока на сопротивление 5 Ом в цепи идет ток 5 А, а при замыкании на сопротивление 2 Ом идет ток 8 А. Найти внутреннее сопротивление и ЭДС источника.

48. Источник тока замкнут на резистор с переменным сопротивлением. При силе тока 1 А напряжение на этом сопротивление равно 9 В, а при силе тока 2 А напряжение равно 8 В. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление.

49. Два параллельно соединенных резистора с сопротивлениями 40 Ом и 10 Ом подключены к источнику тока с ЭДС 10 В. Ток в цепи 1 А. Найти внутреннее сопротивление и ток короткого замыкания.

50. Сколько элементов с ЭДС 2 В и внутренним сопротивлением 0,2 Ом нужно соединить последовательно, чтобы получить во внешней цепи ток силой 5 А при разности потенциалов на полюсах батареи 20 В.

ЗАДАНИЕ 6. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

6.1. Основные характеристики магнитного поля

Вращающий момент сил на рамку с током в магнитном поле $$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] = p_m B \sin\alpha$$ где p_m-магнитный момент рамки с током, $\vec{B}$ - магнитная индукция; α - угол между нормалью к плоскости контура и вектором $\vec{B}$
Магнитный момент рамки с током $\vec{p}_m = IS\vec{n}, p = IS$ S – площадь поверхности контура (рамки); $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности рамки
Магнитная индукция $B = \dfrac{M_{\max}}{p_m}$ где M_{max} – максимальный вращающий момент Единица измерения индукции магнитного поля: Тл (тесла)= 1Н/А·м
Магнитная индукция: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, где $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, А/м μ - магнитная проницаемость среды, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$ - магнитная постоянная
Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей: Магнитная индукция результирующего поля равна: $B = \sum_{i=1}^{n} B_i$ где B_i – магнитная индукция, создаваемая каждым током (движущимся зарядом) в отдельности

6.2. Закон Био -Савара – Лапласа и его применение

Закон Вио – Савара – Лапласа: Магнитная индукция, создаваемая элементом проводника $d\vec{l}$ с током I в

некоторой точке равна: $d\vec{B}=\dfrac{\mu_0\mu I[d\vec{l},\vec{r}]}{4\pi r^3}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из элемента *dl* проводника в точку поля. Скалярная форма записи закона Био – Савара – Лапласа имеет вид: $$dB=\dfrac{\mu_0\mu I dl\sin\alpha}{4\pi r^2}$$ где α - угол между $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.
Магнитное поле прямого тока: $B=\dfrac{\mu_0\mu I}{4\pi r}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$, где $\alpha_{1,}\alpha_2$- углы, под которыми из рассматриваемой точки поля видны начало и конец проводника, *r* – расстояние до проводника Магнитное поле бесконечного прямого тока: $B=\dfrac{\mu_0\mu I}{2\pi r}$
Магнитное поле в центре кругового витка радиусом *r*: $B=\dfrac{\mu_0\mu I}{2r}$
Магнитное поле на оси кругового витка на расстоянии b от его центра $$B=\dfrac{\mu_0\mu I\pi r^2}{4\pi(r^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\mu_0\mu 2p_m}{4\pi(r^2+b^2)^{3/2}}$$ где $p_m=I\cdot 2\pi r^2$ – магнитный момент витка с током *I*
Магнитное поле на оси соленоида конечной длины: $$B=\dfrac{1}{2}\mu_0\mu nI(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1),$$ где *n=N/L* – число витков, приходящихся на единицу длины, *N, L* – соответственно, число витков и длина соленоида, $\alpha_{1,}\alpha_2$ - углы, под которыми из произвольной точки на оси соленоида видны его концы Максимальная индукция в центре соленоида равна: $$B=\mu_0\mu I[1+(\dfrac{2r}{L})^2]^{-1/2},$$ где *r* – радиус витка соленоида.

6.3. Закон. Ампера. Взаимодействие параллельных токов.

Сила Ампера, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad dF = IBdl\sin\alpha,$$

где α - угол между $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Сила Ампера, действующая в магнитном поле на проводник конечной длины l с током I: $\vec{F} = I\int\limits_{(l)}[d\vec{l}, \vec{B}],$

Сила Ампера, действующая в однородном магнитном поле на прямолинейный проводник: $B = IlB\sin\alpha,$

где α -угол между током (вектором плотности тока) в проводнике и вектором $\vec{B}$

Сила взаимодействия двух параллельных токов I_1, I_2 длиной l находящихся на расстоянии r друг от друга: $F = \dfrac{\mu\ \mu I_1 I_2 l}{2\pi r}$

6.4. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Сила Лоренца: $\vec{F}_л = Q[\vec{\upsilon}, \vec{B}], F_л = Q\upsilon B\sin\alpha$
где Q – электрический заряд, движущийся со скоростью $\vec{\upsilon}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$,
α угол между $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$

Формула Лоренца (сила, действующая на движущийся заряд со стороны магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ и электрического поля с напряженностью $\vec{E}$: $\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{\upsilon}, \vec{B}]$

---

1. В однородном магнитном поле, если угол α между $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$ равен 0 или π, сила Лоренца $F_л$=0, то частица движется равномерно и прямолинейно

2. Если угол $\alpha = \pi/2$, тогда $F_л = Q\upsilon B$, частица движется по окружности

радиуса: $r = \frac{m\upsilon}{QB}$,   период обращения частицы равен: $T = \frac{2\pi m}{BQ}$ 3. Заряженная частица движется со скоростью $\vec{\upsilon}$ под углом α к вектору $\vec{B}$, возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю.   Шаг винтовой линии: $h = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{BQ}$ Радиус спирали равен: $r = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{QB}$

6.5 Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ (закон полного тока для магнитного поля в вакууме) и ее применение к расчету магнитных полей

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$:   Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром: $$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$ $$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \int_{(S)} \vec{j}d\vec{S}$$ где $B_l = B\cos\alpha$ - составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру с учетом (выбранного обхода), α - угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{l}$
Магнитное поле на оси бесконечно длинного соленоида (цилиндрической катушки): $B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI$
Магнитное поле внутри тороида (кольцевой катушки): $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$,   Где N- число витков, r – расстояние от центра тороида.

6.6. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток). Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$

Элементарный магнитный поток сквозь площадку dS: $$d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS = DdS\cos\alpha$$

Магнитный поток сквозь произвольную поверхность S $$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS = \int_S BdS\cos\alpha$$
Магнитный поток в однородном поле: $\Phi = BS\cos\alpha$ где α - угол между направлением вектора нормали к площадки и вектора $\vec{B}$ Единица измерения магнитного потока – 1 Вб (вебер) =1 Тл.м^2
Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$**:** Поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю: $\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0$

6.7 Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Элементарная работа по перемещению проводника с током в магнитном поле: $$dA = Id\Phi$$
Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле: $$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$
Работа по перемещению контура с током в магнитном поле $$A = I\Delta\Psi = I(\Psi_2 - \Psi_1)$$ где $\Psi = N\Phi$ - потокосцепление, *N*- число витков контура.

6.8. Закон Фарадея (закон электромагнитной индукции). Правило Ленца.

Закон Фарадея ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность. ограниченную контуром: $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

Правило Ленца: Индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот индукционный ток
ЭДС индукции в неподвижных проводниках: $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, где $\vec{E}_B$ - напряженность электрического поля индуцированного переменным магнитным полем
ЭДС индукции в проводнике длиной l, движущемся в однородном магнитном поле с постоянной скоростью υ: $\varepsilon_i = Bl\upsilon\sin\alpha$, где α - угол между векторами υ и $\vec{B}$
ЭДС индукции, возникающая при вращении рамки в магнитном поле – модель генератора: $\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega t = \varepsilon_{\max}\sin\omega t$ где N и S– число витков и площадь рамки, В – индукция магнитного поля, ω - угловая скорость вращения рамки, $\varepsilon_{\max} = NBS\omega$ - максимальное значение ЭДС

6.9. Индуктивность контура. Самоиндукция.

Сцепленный с контуром магнитный поток $$\Phi = LI,$$ где коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью. Единица индуктивности – Гн (генри) =1 Ом.с
ЭДС самоиндукции в контуре: $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI)$ Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не меняется, то L=const и ЭДС самоиндукции $$\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt}$$
Индуктивность соленоида: $L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l} = \mu_0\mu n^2V$

6.10. Энергия магнитного поля.

Энергия магнитного поля контура с током: $W = \dfrac{LI^2}{2}$
Энергия магнитного поля соленоида $$W = \frac{1}{2}\mu_0\mu\frac{N^2I^2}{l}S = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}V = \frac{BH}{2}V,$$ где $V=Sl$ – объем соленоида.
Объемная плотность энергии магнитного поля: $$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$$

Пример 9. Ток I =20 А, протекая по кольцу из медной проволоки сечением S = 1 мм^2, создает в центре кольца напряженность H = 178 А/м. Какая разность потенциалов U приложена к концам проволоки. образующей кольцо?

Условие:

I=20 А

S = 1 мм^2 = 10^{-6} м^2

H = 178 А/м

$\rho = 0.017$ мкОм.м=1,7.10^{-8} Ом·м

U-?

Решение

Напряженность в центре кругового тока $H = \dfrac{I}{2r}$, (1)

Откуда радиус витка равен $r = \dfrac{I}{2H}$. (2)

К концам проволоки приложено напряжение $U = IR,$ (3)

где сопротивление проволоки равно $R = \rho\dfrac{l}{S} = \rho\, 2\pi r/S$

Подставив полученные значения R в (3), получим: $U = \dfrac{\pi\rho l^2}{HS} = 0{,}12B$

Пример 10. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью V = 10^6 м/с. Индукция магнитного поля B =0,3 Тл. Радиус окружности R = 4 см. Найти заряд q частицы, если известно, что ее энергия W=12 кэВ.

Условие:

V=10^6 м/с

B = 0,3 Тл

R = 4 см = 0,04 м

W=12кэВ= 1,92.10^{-14}Дж

q-?

Решение

В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{\upsilon}, \vec{B}]$

Поскольку частица движется по окружности $F = q\upsilon B$, то сила Лоренца сообщает частице ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Следовательно $q\upsilon B = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$ (1)

Энергия частицы: $W = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, следовательно $m\upsilon^2 = 2W$ (2)

Подставляя (2) в (1), получим $q\upsilon B = \dfrac{2W}{R}$,

Из этого уравнения найдем заряд частицы: $q = \dfrac{2W}{\upsilon BR} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\,Кл$

Пример 11. В однородном магнитном поле. индукция которого B =0.8 Тл. равномерно вращается рамка с угловой скоростью ω =15 рад/с. Площадь рамки S = 150 см^2. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол α=30^0 с направлением магнитного поля. Найти максимальную ЭДС индукции ε_0 во вращающейся рамке.

Условие:

B = 0,8 Тл

ω =15 рад/с

S= 150 см^2 =1,5.10^{-2} м^2

α=30^0

ε_0 -?

Решение:

Мгновенное значение ЭДС индукции определяется законом Фарадея

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}\,(1)$$

При вращении рамки магнитный поток, охватывающий рамку, изменяется по закону:

$$\Phi = BS\sin\alpha\cos\omega t\,(2)$$

подставив (2) в (1) и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции

$$\varepsilon = BS\omega\sin\alpha\sin\omega t$$

Максимальное значение ЭДС достигнет при $\sin\omega t = 1$. Отсюда

$$\varepsilon_0 = BS\omega\sin\alpha = 0{,}09B$$

ЗАДАЧИ

51. По горизонтальному проводнику длиной 20 см и массой 2 г течет ток силой 5 А. Определить индукцию магнитного поля, в которое надо поместить проводник, чтобы он висел, не падая

52. В горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией 10 мТл подвешен на двух легких нитях горизонтальный проводник длиной 10 см, перпендикулярный магнитного полю. Как увеличится сила натяжения каждой из нитей, если по проводнику пропустить ток силой 10 А?

53. Имея скорость 10Мм/с α –частица влетела в однородное магнитное поле, индукция которого 0,3 Тл. Скорость частицы перпендикулярна направлению линий индукции магнитного поля. Найти радиус окружности, по которой будет двигаться частица и период ее обращения. Заряд α - частицы равен $3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса – $6{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг.

54. Протон прошедший ускоряющую разность потенциалов 600 В влетел в однородное магнитное поле с индукцией 0,3 Тл и начал двигаться по окружности. Определить радиус окружности. Заряд протона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса – $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

55.В однородном магнитном поле, индукция которого 0,6 Тл равномерно двигается проводник с током 4 А. Длина проводника 20 см. Скорость движения проводника 20 см/с и направлена перпендикулярно магнитного полю. Найти работу перемещения проводника за 10 с движения и мощность, необходимую для этого перемещения.

56. Магнитный поток через проводящий контур, имеющий электрическое сопротивление 2 Ом, равномерно увеличивается от 0 до $3 \cdot 10^{-4}$ Вб. Какой заряд прошел через поперечное сечение проводника?

57. В однородном магнитном поле с индукцией 0.02 Тл равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной 0.5 Тл. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям индукции. Определить частоту вращения стержня, при которой на концах стержня возникает разность потенциалов 0,1 В.

58. Поток магнитной индукции через площадь поперечного сечения катушки, имеющей 1000 витков, изменился на 0,002 Вб в результате изменения тока в катушке с 4 А до 20 А. Определить индуктивность катушки.

59. Два бесконечно длинных прямолинейных проводника с токами 6 и 8 А расположены перпендикулярно друг другу. Определить индукцию и напряженность магнитного поля на середине кратчайшего расстояния между проводниками, равного 20 см

60. По кольцевому проводнику радиусом 10 см течет ток 4 А. Параллельно плоскости кольцевого проводника на расстоянии 2 см над его центром проходит бесконечно длинный прямолинейный проводник, по которому течет ток 2 А. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в центре кольца. Рассмотреть все возможные случаи.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Контрольная работа № 2 состоит из шести задач и охватывает следующие разделы физики:

Задача № 7 – Механические колебания и волны

Задача № 8 - Электромагнитные колебания и волны. Переменный ток.

Задача № 9 - Законы идеальных газов

Задача № 10 – Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

Задача № 11 – Явления переноса в газах

Задача № 12 – Основы термодинамики

Студенты выполняют контрольную работу, выбирая номера задач по таблице 2.

Таблица 2.

Цифра по шифру	Номер задачи					
	1	2	3	4	5	6
1	61	71	81	91	101	111
2	72	72	82	92	102	112
3	63	73	83	93	103	113
4	64	74	84	94	104	114

5	65	75	85	95	105	115
6	66	76	86	96	106	116
7	67	77	87	97	107	117
8	68	78	88	98	108	118
9	69	79	89	99	109	119
0	70	80	90	100	110	120

ЗАДАНИЕ 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

7.1 Механические колебания

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi); \quad x = A\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где x –смещение колеблющейся величины от положения равновесия;

A – амплитуда колебаний;

$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ - угловая (циклическая) частота;

ν - частота колебаний; T - период; φ - начальная фаза.

Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания;

$v_x = \frac{dx}{dt}t = -A\omega_0\sin(w_0 t + \varphi) = -A\omega_0\cos(\omega_o t + \varphi + \pi/2);$

$a_x = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$

Динамическое уравнение гармонических колебаний**:**

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ или $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 = 0$, где $\omega_0^2 = k/m$

Кинетическая энергия колеблющегося тела массой m:

$$W_k = mv^2/2 = mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)/2.$$

Потенциальная энергия:

$$W_n = mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)/2.$$

Полная энергия: $$W = W_k + W_n = mA^2\omega_0^2/2 = const$$
Периоды колебания маятников: пружинного: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ математического: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, физического: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, где J- момент инерции маятника относительно оси колебаний; l - расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/ml$ - приведенная длина физического маятника; g - ускорение свободного падения
Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы и его решение: $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0; \quad x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$ где x – колеблющаяся величина, описывающая физический процесс; $\beta = r/2m$ - коэффициент затухания; r –коэффициент сопротивления среды; m - масса; ω_0 –свободная циклическая частота незатухающих колебаний той же системы; $\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$- частота затухающих колебаний; $Ae^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний.
Декремент затухания: $A(t)/A(t+T) = e^{\beta t}$,

где *A(t), A(t+T)* - амплитуды двух последовательных колебаний соответствующих моментам времени, отличающимся на период. Логарифмический декремент затухания: $\theta = \ln A(t)/A(t+T) = \beta T = T/\tau = 1/N$, где τ – время релаксации N - число колебаний, совершаемых за время уменьшения колебаний в е раз. Добротность колебательной системы: $\Omega = \pi / \theta = \omega_0/2\beta$
Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение для установившихся колебаний: $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos\Omega t$$ $$x = A\cos(\Omega t - \varphi),$$ где x – координата колеблющейся точки; $F = F_0 \cos \Omega t$ – внешняя сила, вызывающая вынужденные колебания; Амплитуда: $A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta\Omega^2}}$ A = $F_0/ m [(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4 \beta \Omega^2]^{1/2}$; Фаза: $\varphi = arctg\ 2\beta\pi/(\nu_0^2 - \Omega^2)$ Резонансная частота и резонансная амплитуда: $$\omega_P = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2};$$ $$A_P = \frac{F_0}{2m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

7.1 Упругие волны

Связь длины волны λ, периода колебаний T и частоты ν: $$\lambda = vT = v/\nu; \quad v = \lambda\nu,$$ где v –фазовая скорость (скорость распространения колебаний в среде)

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси х: $x(t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

где $x(t)$ – координата точки в момент времени;

A –амплитуда волны;

ω - циклическая (круговая) частота;

$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/vT = \omega/v$ – волновое число;

λ – длина волны; v-фазовая скорость;

T – период колебаний;

φ_0 – начальная фаза колебаний

Связь между разностью фаз $\Delta\varphi$ и разностью хода d

$$\Delta\varphi = \pi d/\lambda$$

Условия максимумов и минимумов амплитуды при интерференции:

$$\Delta\varphi_{max} = \pm 2\pi m; \quad \Delta\varphi_{min} = \pm(2m+1)\pi m$$

$$\Delta d_{vax} = \pm m\lambda; \quad \Delta d_{min} = \pm(2m+1)\lambda/2,$$

Где $m = 0, 1, 2$.

Фазовая v и групповая скорость u:

$$v = \omega/k; \; u = d\omega/dk; \quad u = v - \lambda\, dv/d\lambda$$

Уравнение стоячей волны:

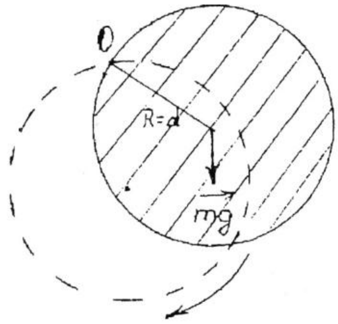
$$x(t) = 2A(\cos 2\pi x/\lambda)\cos\omega t = 2A\cos kx \cos\omega t.$$

Координаты пучностей и узлов:

$$x_n = + m\lambda/2; \quad x_y = + (m + 1/2)\lambda/2, \; m=0, 1, 2.$$

Пример 12. Сплошной однородный диск колеблется около оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через край диска (рис.).

Найти радиус диска, если приведенная длина этого физического маятника равна L = 0,15 м.



Условие:
L = 0,15 м;
R - ?

Решение. Период колебания физического маятника может быть рассчитан двояко:

$$T_ф = 2\pi(L/g)^{1/2}, \ \text{или} \ T_ф = 2\pi(J/mgd)^{1/2},$$

где J - момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через точку O;

d – расстояние от оси вращения до центра тяжести, в данном случае $d = R$.

$$2\pi(L/g)^{1/2} = 2\pi(J/mgd)^{1/2} \quad (1)$$

Из уравнения (1) находим: L = J/md.

По теореме Штейнера: $J = J_0 + md^2$,

где J_0 –момент инерции относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр тяжести. Для диска $J_0 = mR^2/2$.

Итак, $L = (J_0 + md^2)/md = 3R/2$.

Откуда: $R = 2L/3 = 0{,}10$ *м.*

Пример 13. Определить возвращающую силу F в момент времени t = 0,2 с и полную энергию W точки массой m = 20 г, совершающей гармонические колебания согласно уравнению $x = A\sin \omega t$, где A =15 см; $\omega = 4$ $с^{-1}$. Найти также время t, когда x = A/2.

Решение. Силу по второму закону Ньютона определим как

$F = ma$, где ускорение $a = d^2x/dt^2 = - A\omega^2 \sin \omega t$.

Тогда $F = -mA\omega^2 \sin \omega t = -0{,}02$ Н.

Полная энергия колеблющейся точки равна $W = m\omega^2 A^2/2 = =3{,}55\cdot10^{-2}$ Дж.

Время, через которое смещение $x = A/2$, найдем из того, что

$$A/2 = A\sin \omega t, \quad \sin \omega t = 1/2, \quad \omega t = \pi/6.$$

Откуда $t = \pi/6\omega = 4{,}17\cdot10^{-2}$ с.

ЗАДАЧИ

61. Период колебания маятника часов ходиков на поверхности Земли $T = 1$ с. На сколько будут отставать часы за сутки, если их поднять на высоту $h = 200$ м над поверхностью Земли? Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}81$ м/с.

62. Определить массу тела, совершающего гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см, частотой $\nu = 2$ Гц и начальной фазой $\varphi = \pi/6$, если полная энергия тела $W = 7{,}7\cdot10^{-3}$ Дж. Через сколько времени после начала движения кинетическая энергия будет равна потенциальной?

63. Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н·м. Определить тело какой массы m должно быть подвешено к пружине, чтобы за $t = 1$ мин совершалось $N = 25$ колебаний?

64. Математический маятник длиной $L = 1$ м подвешен к потолку кабины, которая начинает спускаться вертикально вниз с ускорение $a = g/4$. Спустя время $t_1 = 3$ с после начала движения кабина начинает двигаться равномерно, а затем в течении $t_2 = 3$ с тормозится до остановки. Определить периоды T_1, T_2, T_3 маятника на каждом из участков пути.

65. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3 \cos 2\omega t$, см и $y = 4 \cos(2\omega t + n)$, см. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с соблюдением масштаба.

66. Начальная фаза затухающих колебаний маятника
$A_0 = 3$ см. По истечении времени $t = 10$ с $A_1 = 1$ см. Определить через сколько времени амплитуда колебаний станет равной
$A_2 = 0,3$ см.

67. За время, в течении которого система совершает $N = 50$ полных колебаний, амплитуда уменьшается в $k = 2$ раза. Определить добротность системы Θ.

68. Период затухающих колебаний системы составляет $T = 0,2$ с, а отношение амплитуды первого и шестого колебаний $A_1/A_6 = 13$. Определить резонансную частоту ω_p данной колебательной системы.

69. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 150$ м/с. Определить частоту ν колебаний, если минимальное расстояние между точками среды фазы колебаний которых противоположны, равно $x = 0,75$ м.

70. Два когерентных источника посылают поперечные волны в одинаковых фазах. Периоды колебаний $T = 0,2$ с, скорость распространения волн в среде $v = 800$ м/с. Определить при какой разности хода в случае наложения волн будет наблюдаться: 1) ослабление колебаний; 2) усиление колебаний.

ЗАДАНИЕ 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.

8.1 Свободные электромагнитные колебания в идеализированном колебательном контуре

Колебательный контур – цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивности, конденсатора и резистора, и предназначенная для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний.

В идеальном колебательном контуре R=0, полная энергия сохраняется:

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const,$$

где $W_Э = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$ - энергия электрического поля конденсатора,

$W_M = \frac{LI^2}{2}$ - энергия магнитного поля катушки индуктивности

Дифференциальное уравнение колебаний заряда в контуре:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0$$

Решение дифференциального уравнения: $Q = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Период (формула Томсона): $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

8.2. Свободные затухающие колебания в колебательном контуре

Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\delta\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0,$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - собственная частота колебательного контура

Решение дифференциального уравнения: $Q = Q_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$.

Амплитуда затухающих колебаний $Q = Q_0 e^{-\delta t}$

Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Период затухающих колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$

8.3 Вынужденные электромагнитные колебания

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний $\frac{d^2Q}{dt^2}+2\delta\frac{dQ}{dt}+\omega_0^2Q=E_M\cos\omega t$, где $\delta=\frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ - собственная частота колебательного контура
Зависимость амплитуды колебаний заряда на конденсаторе от частоты внешней ЭДС: $Q_M=\frac{E_M}{L\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\delta^2\omega^2}}$
Резонансная частота для заряда : $\omega_{Рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}}$
Сила тока при установившихся вынужденных колебаниях: $I=I_0\cos(\omega t-\varphi)$
Резонансная частота для силы тока: $\omega_{РЕЗ}=\omega_0=\frac{1}{LC}$

8.4. Закон Ома для цепи переменного тока

Индуктивное сопротивление цепи $R_L=\omega L$ Емкостное сопротивление цепи: $R_C=\frac{1}{\omega C}$ Реактивное сопротивление цепи: $X=R_L-R_C=\omega L-\frac{1}{\omega C}$ Полное сопротивление цепи: $Z=\sqrt{R^2+(R_L-R_C)^2}=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ Закон Ома для цепи переменного тока: $I=\frac{U}{Z}$ Условие резонанса: $\omega L=\frac{1}{\omega C}$ $Z=R$
Сдвиг фаз между напряжением и силой тока: $tg\varphi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$
Действующие (эффективные) значения тока и напряжения: $I=\frac{I_M}{\sqrt{2}}$ $U=\frac{U_M}{\sqrt{2}}$
Трансформатор – прибор переменного тока, преобразующий напряжение и силу тока, не изменяющий мощность и частоту тока Коэффициент трансформации: $k=\frac{U_1}{U_2}=\frac{N_1}{N_2}$,

где U_1, U_2 - напряжение на первичной и вторичной обмотках трансформатора,
$N_1,\ N_2$ - число витков первичной и вторичной обмоток
$k \succ 1$ - трансформатор понижающий
$k \prec 1$ - трансформатор повышающий

Пример 14. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности 0,4 Гн и конденсатора емкостью 10^{-5} Ф. Конденсатор зарядили до напряжения 4 В и замкнули ключ. Как зависит от времени заряд, напряжение на обкладках конденсатора и сила тока через катушку, а также энергия магнитного и электрического полей?

Условие:
L= 0,4 Гн
C=10^{-5} Ф
U=4 В
Q(t), U(t), I(t) - ?
$W_{эл}$- ? $W_м$ - ?

Решение

В колебательном контуре происходят колебания с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ и циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ = $0{,}5 \cdot 10^3$ с.

Напряжение на конденсаторе будет изменяться по закону

$U = U_0 \cos\omega t$ $U = 4\cos 0{,}5\cdot 10^3 t$, В

Поскольку $Q = U \cdot C$. для заряда на конденсаторе имеем

$Q = U_0 C\cos\omega t$ $Q = 4\cdot 10^{-5}\cos 0{,}5\cdot 10^3 t$, Кл

По определению сила тока равна

$I = \frac{dQ}{dt} = -U_0 C\omega\sin\omega t$ $I = 2\cdot 10^{-2}\sin 0{,}5\cdot 10^3$, А

Энергия электрического поля равна:

$W_Э = \frac{Q^2}{2C}$ $W_Э = 8\cdot 10^{-5}\cos^2 0{,}5\cdot 10^3 t$, Дж

Энергия магнитного поля определяется по формуле:

$W_M = \frac{LI^2}{2}$ $W_M = 8\cdot 10^{-5}\sin^2 0{,}5\cdot 10^3 t$, Дж

---

71. Контур приемника с конденсатором емкостью 20 пФ настроен на длину волны 5 м. Определить индуктивность катушки и частоту колебаний.

72. В каких пределах должна изменяться индуктивность катушки колебательного контура, чтобы в контуре происходили колебания с частотой от 400 Гц до 500 Гц. Величина емкости конденсатора 10 мкФ.

73. Емкость конденсатора колебательного контура радиоприемника можно менять в пределах от 0,1 нФ до 5 нФ, а индуктивность от 0,5 мГн до 1 мГн. Какой диапазон частот можно охватить настройкой этого приемника.

74. Конденсатор емкостью 10 мкФ зарядили до напряжения 1000 В и подключили к катушке индуктивности. Какое количество теплоты выделится за время в течении которого амплитуда напряжения в ходе затухающих колебаний уменьшится в 2 раза.

75. Сколько колебаний происходит в электромагнитной волне длиной 30 м в течение одного периода звуковых колебаний с частотой 200 Гц?

76. Заряд на обкладках конденсатора колебательного контура изменяется по закону $q = 3 \cdot 10^{-7} \cos 800\pi t$ Кл. Индуктивность контура 2 Гн. Пренебрегая активным сопротивлением найти ёмкость его конденсатора.

77. Мгновенное значение ЭДС синусоидального тока для фазы $\pi/6$ равно 120 В. Каково амплитудное и действующие значение ЭДС?

78. Найти индуктивность катушки, если амплитуда переменного напряжения на ее концах равна 160 В. амплитуда тока 10 А и частота тока 50 Гц. Активным сопротивлением пренебречь

79. В цепи переменного тока напряжением 120 В включены последовательно конденсатор емкостью C, активное сопротивление R и катушка с индуктивностью L. Определить падение напряжения на активном сопротивление, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C = 2U_R$, а падение напряжения на катушке $U_L = 3U_R$

80. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации 8 включена в сеть напряжением 220 В. Сопротивление вторичной обмотки 2 Ом, ток во вторичной обмотке трансформатора 3 А. Определить напряжение на зажимах вторичной обмотки. Потерями в первичной обмотке пренебречь.

ЗАДАНИЕ 9. ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

9.1 Макроскопические состояния

Число молей вещества: $$\nu = m/M; \quad \nu = V/V_M,$$ где m – масса; M - молярная масса; V – объем, V_M – молярный объем.
Масса одной молекулы: $$m_0 = M/N_A; \quad m_0 = \rho/n,$$ где M – молярная масса, $N_A = 6{,}023\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ - число Авогадро; ρ - плотность; n_0 - концентрация, определяется из соотношений: $$n_0 = N/V; \quad n = \rho/m_0; \quad n = N_A/M.$$
Число молекул в данной массе вещества: $$N = m/m_0 = m\,N_a/M.$$
Термодинамическая температура связана с температурой шкалы Цельсия $$T,K = t°C + 273{,}15; \quad t°C = T,K - 273{,}15°C$$

9.2 Уравнения состояния идеального газа. Изопроцессы

Уравнения состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона):

для одного моля газа; $pV_м = RT$ - для произвольной массы газа: $pV = mRT/M$; $pV = \nu RT$ - где $V_м$ - молярный объем; M - молярная масса; m – масса газа; $\nu = m/M$ -количество вещества; R – универсальная газовая постоянная
Объединенный газовый закон (уравнение Клапейрона): $pV/T = const$; $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$ где p –давление газа; V –объем; T – термодинамическая температура
Закон Бойля –Мариотта (изотермический процесс): $pV = const$; $p_1V_1 = p_2V_2$ при $T = const$, $m = const$
Закон Гей-Люссака (изобарический процесс): $V = V_0(1 + \alpha t)$ или $V/T = const$; $V_1/V_2 = T_1/T_2$ при $p = const$, $m = const$ Закон Шарля (изохорический процесс): $p = p_0(1 + \alpha t)$ или $p/T = const$; $p_1/p_2 = T_1/T_2$ при $V = const$, $m = const$, где t –температура по шкале Цельсия, V_0, p_0 –соответственно объем и давление при 0^0С, коэффициент $\alpha = 1/273\ K^{-1}$, p, V, T соответственно давление, объем и термодинамическая температура
Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов: $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$, где p_i - парциальное давление i -ой компоненты газа
Закон Авогадро:

при T_0 = 0^0C =273 К, p_0 =1 атм =$1{,}013\cdot10^5$ Па мольный объем любого газа $V_м$ =22,4 л $\cdot$моль$^{-1}$ = $2{,}24\cdot10^{-2}$ м$^3\cdot$моль$^{-1}$

Пример 15. В двух баллонах имеются два газа: водород – H_2 и углекислый газ – CO_2. Во сколько раз число молекул одного газа больше числа молекул другого газа, если массы газов одинаковы?

Условие:

$M_1 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль;

$M_2 = 44\cdot10^{-3}$ кг/моль;

N_1/N_2 - ?

Решение. В одном моле вещества содержится число молекул, равное числу Авогадро N =$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$. Количество вещества водорода ν = $m/M_{1,}$ а в углекислом газе содержиттся число молей $\nu_2 = m/M_2$. Тогда число молекул водорода $N_1 = \nu_1 N_A = mN_A/M_1$, число молекул углекислого газа $N_2 = \nu_2 N_A = mN_A/M_2$.

Разделив N_1 на N_2 , получим ответ

$$N_1/N_2 = M_2/M_1 = 44/2 = 22$$

Пример 16. В баллоне объемом V = 10 л находится гелий под давлением p_1 = 1 МПа и при температуре T_1 = 300 К. После того, как из баллона было взято m = 10 г гелия, температура в баллоне понизилась до T_2 = 290 К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне, и изменение внутренней энергии газа.

Условие:

V = 10 л = 10^{-2} м^3;

p_1 = 1,0 МПа = $1{,}0\cdot10^6$ Па;

T_1 = 300 К;

m = 10 г = $1{,}0\cdot10^{-2}$ кг;

$T_2 = 290$ К;

$R = 8{,}314$ Дж/кг·К;

$M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль;

p_2 - ? U -?

Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2V = m_2RT_2/M, \qquad (1)$$

где m_2 – масса гелия в конечном состоянии;

M – молярная масса гелия;

R – универсальная газовая постоянная.

Из уравнения (1) выразим искомое давление

$$p_2 = m_2RT_2/MV. \qquad (2)$$

Массу m_2 гелия выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона:

$$m_2 = m_1 – m. \qquad (3)$$

Массу m_1 гелия найдем также из уравнения Менделеева- Клапейрона, применив его к начальному состоянию:

$$m_1 = Mp_1V/RT_1. \qquad (4)$$

Подставив выражение массы m_1 в уравнение (2), а затем выражение m_2 в уравнение (1), найдем

$$p_2 = (Mp_1V/RT_1 – m)RT_2/MV, \qquad (5)$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}.$$

Формула (5) дает единицу давления

$$[p] = К \cdot Па/К – кг \cdot Дж \cdot К \cdot моль/(кг \cdot моль \cdot м^3 \cdot К) =$$

$$= Па – Дж/м^3 = Па – Н \cdot м/м^3 = Па.$$

Вычисления

$p_2 = 290 \cdot 10^6/300 – 1{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}314 \cdot 290/(4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}) = 3{,}64 \cdot 10^5$ Па.

Внутренняя энергия газа в исходном состоянии

$$U_1 = m_1iRT_1/2M.$$

Для газа, оставшегося в баллоне

$$U_2 = m_2\, iRT_2/2M.$$

Изменение энергии газа

$$U = U_1 - U_2 = R(m_1 - m_2)\,(T_1 - T_2)/M = Rm\,(T_1 - T_2)/M.$$

Проверка размерности: [U] = Дж·кг·К·моль/моль·К·кг = Дж.

Ответ: U = 208 Дж.

ЗАДАЧИ

81. В цилиндре двигателя температура всасываемого воздуха в конце такта равна $t_1 = 40^0$ С, а давление до сжатия $P_1 = 80$ кПа. Определить температуру t_2 сжатого воздуха, если в конце сжатия давление воздуха возросло до $p_2 = 3,5$ МПа, а степень сжатия его равна k = 15.

82. Разряжение создаваемое воздухоочистителем дизеля СМД–4, $P_{изб}= 4,9$ кПа, барометрическое давление $P_0=0,101$ МПа. Найти плотность воздуха на входе двигателя, если температура воздуха $t = 15^0$ С (молярная масса воздуха $M =29\cdot10^{-3}$ кг /моль).

83. Горелка потребляет m = 71,2 г светильного газа ($M=16,4\cdot10^{-3}$ кг/моль) в течении $t_1 =1$ ч. Каков должен быть объем V газового баллона, чтобы находящегося в нем газа при давлении P= 10 МПа хватило на $t_2 =12$ часов работы горелки. Температура газа равна $t = 0^0$ С и во время работы остается постоянной. Атмосферное давление $P_0 = 0,101$ МПа.

84. В сварочном цехе стоит n = 40 баллонов ацетилена (C_2H_2) вместимостью $V = 4\cdot10^{-2}$ м^3 каждый. Все баллоны включены в общую магистраль. После t = 12 ч непрерывной работы давление во всех баллонах упало с $P_1 = 13$ МПа до $P_2 = 7$ МПа. Определить расход ацетилена m/t за 1 мин, если температура в цехе оставалась постоянной и равной $t = 32^0$ С ($M = 26\cdot10^{-3}$ кг/ моль).

85. Масса m = 12 г газа занимает объем V = 4 л при температуре $t_1 = 70$ С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равной $\rho = 0,6$ кг /м^3. До какой температуры t_2 нагрели газ.

86. Перед проведением газосварочных работ манометр баллона с кислородом показывал давление $P_1 = 10$ МПа, а после сварки $P_2 = 8$ МПа. Сколько кислорода k (в %) было израсходовано? Температура и объем кислорода в баллоне не изменялись.

87. Светильный газ подают по газопроводу при давлении P = 0,4 МПа и температуре T = 300 К, причем через поперечное сечение трубы площадью $S = 0,8\cdot10^{-2}$ м^2 за t = 120 с прошло m = 8,4 кг газа. Определить среднюю скорость v газа в газопроводе. Молярная масса газа $M = 16,4\cdot10^{-3}$ кг моль.

88. В сосуде находится масса m_1 = 14 г азота (M_1=28·10^{-3} кг/моль) и масса m_2= 9 г водорода (M_2 =2·10^{-3} кг/моль) при температуре t =10^0 С, и давлении P=1 МПа. Найдите молярную массу M смеси и объем V сосуда.

89. В воздухе содержится k_1 = 23,6 % кислорода (M_1 =32·10^{-3} кг/моль) и k_2 = 76,4 % азота (M_2= 23·10^{-3} кг/моль) по массе при давлении P = 100 кПа и температуре воздуха t = 13^0 С. Найдите плотность ρ воздуха и парциальные давления P_1 и P_2 кислорода и азота.

90. В сосуде объемом V = 2 л находится m_1 = 6 г углекислого газа (M_1 = 44·10^{-3} кг/моль) и m_2 = 4 г окиси азота (M_2 = 30 кг/моль) при температуре t = 127^0 С. Найдите давление P смеси в сосуде.

ЗАДАНИЕ 10. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

10.1 Идеальный газ как модельная термодинамическая система. Статистические распределения

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:

$$p = n_0 m\langle v^2_{кв}\rangle/3; \quad p = \rho\langle v^2_{кв}\rangle/3; \quad p = 2n\langle\varepsilon\rangle/3; \quad \langle\varepsilon\rangle = m\langle v_{кв}{}^2\rangle/2,$$

где $\langle v_{кв}\rangle$ -средняя квадратичная скорость молекул;

$\langle\varepsilon\rangle$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы;

n_0 –концентрация молекул;

m - масса одной молекулы;

ρ - плотность газа

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = dN(v)/Ndv = 4\pi\,(m_0/2\pi kT)^{3/2} v^2 exp\,[\,-m_0v^2/2kT],$$

где функция $f(v)$ распределения молекул по скоростям определяет число молекул $dN(v)/N$ из общего числа молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$

Барометрическая формула:

$$p = p_0\,exp\,[\,-Mg\,(h - h_0)/RT];$$

$$p = p_0 exp[\,-m_0g(h - h_0)/kT],$$

где p и p_0 – давление газа на высоте h и h_0 ,

M - молярная масса газа,

m_0 -масса молекулы,

R - универсальная газовая постоянная,

k - постоянная Больцмана

Распределение Больцмана во внешнем центральном поле:

$$n = n_0\,exp\,[\,-Mgh/RT];$$

$n = n_0\ exp\ [-m_0gh/kT];$ $n = n_0 exp[-\ W_n/kT]\ ,$ где n , n_0 -концентрация молекул на высоте h и $h_0=0;$ W_n - потенциальная энергия молекул в поле тяготения
Скорости молекул: наиболее вероятная: $v_b = (2RT/M)^{1/2} = (2kT/m_0)^{1/2} = (2p/\rho)^{1/2}$ средняя квадратичная: $<v_{кв}> =(3RT/M)^{1/2}= (3kT/\ m_0)^{1/2} =(3p/\rho)^{1/2}$ средняя арифметическая: $<v> = (8RT/\pi M)^{1/2} =(8kT/\pi m_0)^{1/2}= (8p/\pi\rho)^{1/2}$ где T - абсолютная температура газа; M - молярная масса газа; m_0 – масса одной молекулы; p - давление газа; ρ – плотность газа; R – универсальная газовая постоянная; k – постоянная Больцмана
Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы: $<\varepsilon_k> =3kT/2.$ Средняя полная энергия молекулы: $<\varepsilon_k> = ikT/2,$ где i-число степеней свободы молекул; k – постоянная Больцмана; T –термодинамическая температура одноатомный газ: $i =3;$ двухатомный газ: $i=5;$ многоатомный газ: $i =6.$
Зависимость давления газа от температуры: $p = nkT$

Пример 17. Температура окиси азота NO T =300 К. Определить долю молекул, скорости которых лежат в интервале от v_1 = 820 м/с до v_2 = 830 м/с

<table>
<tr>
<td>

Условие:

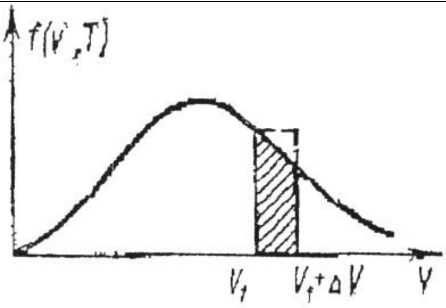
T = 300 К;

v_1 = 820 м/с;

v_2 = -830 м/с;

ΔN /N - ?

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Решение. Рассматриваемый газ находится в равновесном состоянии, и согласно Максвеллу, относительное число молекул, скорость которых заключена в интервале от v до v + dv

$$\Delta N/N = f(v, T)dv,$$

где f (v, T) – функция Максвелла;

dv – настолько малый диапазон скоростей, что в пределах его заведомо f (v, T) = const.

В условии задачи требуется определить долю молекул, скорости которых лежат в диапозоне $\Delta v = v_2 - v_1 = 10$ м/с.

Если в этом пределе функцию Максвелла можно считать с достаточной точностью постоянной, то искомая величина может быть рассчитана по приближенной формуле

$$\Delta N/N = f(v_1, N)\Delta v. \qquad (1)$$

Такое приближение соответствует тому, что на рис. 6 заштрихованная площадь приравнивается к площади прямоугольника с основанием v_1 и высотой, равной значению f (v, T).

Следовательно, прежде всего надо найти значения функции Максвелла при $v = v_1$ и $v = v_2$ и выяснить, какую погрешность может дать использование равенства (1).

Функция Максвелла имеет вид

$$f(v,T) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v}{v_в}\exp\left(-\frac{v}{v_в}\right), \qquad (2)$$

где $v_в = (2kT/m_0)^{1/2} = (2RT/M)^{1/2}$ - (3)

- наиболее вероятная скорость молекул

Для облегчения расчета найдем сначала наиболее вероятную скорость по равенству (3) $v_b = 410$ м/с.

Тогда согласно (2)

$f(v_1,T) = 4{,}03\cdot10^{-4}$ с/м $f(v_2, T) = 3{,}75\cdot10^{-4}$ с/м.

Это означает, что при использовании выражения (23) допускается ошибка относительная величина которой

$\delta f = [f(v_1, T) – f (v_2, T)]/f (v_1, T) = 0{,}07 = 7\%$.

Следовательно, с указанной степенью точности можно использовать равенство (2). Тогда доля молекул, скорости которых лежат в заданном интервале

$\Delta N/N = f (v_1, T)\Delta v = 4{,}0 \cdot 10^{-3} = 0{,}4\%$.

ЗАДАЧИ

91. Считая воздух газом состоящим из одинаковых молекул, определите среднеквадратичную скорость v_{kb} молекул газа при нормальных условиях, если плотность воздуха при нормальных условиях $\rho = 1,3$ кг/м^3.

92. Сколько молекул N газа находится в сосуде вместимостью V=480 см^3 при температуре $t=20^0$ C и давлении $P=2{,}5\cdot10^4$ Па?

93. Средняя квадратичная скорость молекул газа v_{kb}=400 м/с. Определите объем V, который занимает газ при среднем давлении $P = 1{,}0\cdot10^5$ Па и массе m = 1,0 кг.

94. Какой средней скоростью <v> обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло $\varphi = 5{,}4^0$, при частоте вращения прибора $\nu = 150$ с$^{-1}$. Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно x = 2 см.

95. При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной на Δv=100 м/с. Молярная масса кислорода $M = 32\cdot10^{-2}$ кг/ моль.

96. При какой температуре молекулы водорода имеют такую же среднеквадратичную скорость, как молекулы аргона при $t = 27^0$ С? Молярная масса водорода $M_1 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль, аргона $M_2 = 18\cdot10^{-3}$ кг/моль.

97. Двухатомный газ массой $m = 2$ кг находится под давлением $P = 5\cdot10^5$ Па и имеет плотность $\rho = 4{,}0$ кг/м^3 . Найдите энергию W теплового движения газа при этих условиях.

98. На какой высоте давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна $t = 10^0$ С.

99. Определить отношение давления воздуха на высоте $h = 1$км и давление на дне скважины глубиной $h = 1$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, а его температура не зависит от высоты.

100. Какая часть молекул азота при температуре $t = 150^0$ С имеет скорости, лежащие в интервале от v_1=300 м/с до v_2=800 м/с?

11. ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

11.1 Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

Среднее число соударений, испытываемых молекулой за 1 с: $$\langle Z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n_0 \langle v \rangle,$$ где d – эффективный диаметр молекулы; n_0 – концентрация молекул; $\langle v \rangle$ - средняя арифметическая скорость молекул
Средняя длина свободного пробега молекул газа: $$\langle l \rangle = \langle v \rangle / \langle Z \rangle = 1/\sqrt{2}\pi d^2 n_0$$
Закон диффузии Фика: $$M = -D\,(d\rho/dx)\Delta s\Delta t,$$ где M – масса вещества, переносимого через площадку Δs за время Δt; $d\rho/dx$ – градиент плотности; D - коэффициент диффузии $$D = \langle v \rangle\langle l \rangle/3$$
Закон Ньютона для внутреннего трения: $$F = -\eta(dv/dx)\Delta s,$$ где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями газа площадью Δs; dv/dx – градиент скорости; η - коэффициент динамической вязкости $$\eta = \rho\langle v \rangle\langle l \rangle/3,$$ где ρ - плотность газа
Закон теплопроводности Фурье: $Q = -\lambda(dT/dx)\Delta s\Delta t,$

где Q–количество теплоты, прошедшее посредством теплопроводности через площадь Δs за время Δt; dT/dx –градиент температуры; λ – коэффициент теплопроводности: $$\lambda = \rho c_v \langle v\rangle\langle l\rangle/3,$$ где c_v -молярная теплоемкость газа.
Связь между коэффициентами переноса: $$\eta/D = \rho; \qquad \lambda/\eta = c_v; \qquad \lambda/D = c_v$$

Пример 18. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул азота, коэффициент диффузии D и вязкость η при давлении $p = 1,0\cdot 10^5$ Па и температуре $t = 17^0$ С.

Условие:

$p = 1,0\cdot 10^5$ Па;

$T = 17^0$ С $= 290$ K;

$d = 3,7\cdot 10^{-8}$ см;

l -? D - ?

Решение. Средняя длина свободного пробега $\langle l\rangle$ и коэффициенты переноса D и η могут быть рассчитаны по следующим формулам:

$$\langle l\rangle = 1/\pi\, 2^{1/2} d^2 n; \qquad (1)$$

$$D = \langle l\rangle\cdot\langle v\rangle/3; \qquad (2)$$

$$\eta = \langle l\rangle\cdot\langle v\rangle\, n m_0/3, \qquad (3)$$

где n – концентрация молекул газа; $\langle v\rangle$ - средняя скорость молекул газа; m_0 - масса одной молекулы.

Концентрацию молекул газа по заданным значениям давления и температуры определим из уравнения:

$$p = nkT. \qquad (4)$$

Выражая концентрацию из уравнения (4) и подставляя в (1) получим $\langle l \rangle = kT(\pi 2^{1/2} d^2 p) = 6{,}5 \cdot 10^{-8}$ м.

Средняя скорость $\langle v \rangle = (8RT/M)^{1/2} = 470$ м/с.

Для расчета коэффициента диффузии по формуле (2) воспользуемся полученным результатом, тогда $D = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Для расчета n подставим в выражение (3) формулу (1)

$$\eta = m_0 \langle v \rangle / 3\pi 2^{1/2} d^2,$$

где $m_0 = M/N_A$. Окончательно

$$\eta = M\langle v \rangle / 3\pi 2^{1/2} d^2 N_A = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м·с}.$$

ЗАДАЧИ

101. Считая воздух газом состоящим из одинаковых молекул, определите среднеквадратичную скорость v_{kb} молекул газа при нормальных условиях, если плотность воздуха при нормальных условиях $\rho = 1{,}3$ кг/м^3.

102. Сколько молекул N газа находится в сосуде вместимостью $V=480$ см^3 при температуре $t=20^0$ C и давлении $P=2{,}5 \cdot 10^4$ Па?

103. Средняя квадратичная скорость молекул газа $v_{kb}=400$ м/с. Определите объем V, который занимает газ при среднем давлении $P = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па и массе $m = 1{,}0$ кг.

104. Какой средней скоростью $\langle v \rangle$ обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло $\varphi = 5{,}4^0$, при частоте вращения прибора $\nu = 150$ с$^{-1}$. Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно $x = 2$ см.

105. При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной на Δv=100 м/с. Молярная масса кислорода $M = 32 \cdot 10^{-2}$ кг/ моль.

106. При какой температуре молекулы водорода имеют такую же среднеквадратичную скорость, как молекулы аргона при $t = 27^0$ С? Молярная масса водорода $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, аргона $M_2 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

107. Двухатомный газ массой $m = 2$ кг находится под давлением $P = 5 \cdot 10^5$ Па и имеет плотность $\rho = 4{,}0$ кг/м^3 . Найдите энергию W теплового движения газа при этих условиях.

108. На какой высоте давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна $t = 10^0$ С.

109. Определить отношение давления воздуха на высоте $h = 1$км и давление на дне скважины глубиной $h = 1$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, а его температура не зависит от высоты.

110. Какая часть молекул азота при температуре $t = 150^0$ С имеет скорости, лежащие в интервале от v_1=300 м/с до v_2=800 м/с?

ЗАДАНИЕ 12. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

12.1 Внутренняя энергия и работа идеального газа. Первый закон термодинамики и его применение к изопроцессам

Внутренняя энергия идеального газа: $U = \nu iRT/2 = miRT/2M = ipV/2,$ где ν – количество вещества, m - масса газа; M – молярная масса газа; p, V -давление и объем; i - число степеней свободы; R – универсальная газовая постоянная. Изменение внутренней энергии идеального газа: $dU = miRdT/2M$
Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема: $\partial A = pdV = mRdT/M.$ Полная работа при изменении объема газа: $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{T_1}^{T_2} \eta RdT$. Изобарный процесс: $A = p(V_2-V_1) = mR(T_2-T_1)/M$. Изотермический процесс: $A = mRT(\ln V_2/V_1)/M = mRT(\ln p_1/p_2)/M = p_1V_1\ln(V_2/V_1) = p_2V_2 \cdot \ln(p_1/p_2)$ Изохорический процесс: $A = 0$
Первый закон термодинамики; $Q = \Delta U + A,$ где Q – количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею;

ΔU - изменение внутренней энергии; A –работа системы против внешних сил $V = const \quad Q = \Delta U;$ $T = const \quad Q = A;$ $p = const \quad Q = \Delta U + A$

12.2 Теплоемкость идеального газа

Теплоемкость тела: $C = \partial Q/dT,$ где ∂Q -количество подведенной теплоты; dT - приращение температуры
Молярная теплоемкость тела: $C_\mu = C/M = \partial Q/MdT,$ где M - молярная масса
Удельная теплоемкость: $c = C/m = \partial Q/mdT$ где m - масса тела
Молярная изохорная теплоемкость газа: $C_v = iR/2,$ где i – число степеней свободы молекул; R – универсальная газовая постоянная. Удельная изохорная теплоемкость газа: $c_v = C_v/M = iR/2M$
Молярная изобарная теплоемкость газа: $C_P = (i+2)R/2;$ Удельная изобарная теплоемкость газа: $c_P = C_P/M = (i+2)R/2M$
Уравнение Майера: $C_P - C_V = R; \; c_P - c_V = R/\mu.$

Показатель адиабаты (отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме): $C_P/C_v = (i+2)/i$

12.3 Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона

Первый закон термодинамики для адиабатного процесса:

$$Q = 0; \qquad A + \Delta U = 0; \qquad A = -\Delta U$$

Уравнение Пуассона:

$$pV^{\gamma} = const; \quad TV^{\gamma-1} = const; \quad T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const,$$

где $\gamma = C_P/C_v$

Работа газа при адиабатном процессе:

$$A = -\Delta U = mc_v(T_1 - T_2);$$

$$A = RT_1m\,[1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1}]/(\gamma - 1)M = p_1V_1[1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1}]/(\gamma - 1),$$

где T_1, T_2, V_1, V_2 - соответственно начальные и конечные значения температуры и объемов газа

12.4 Тепловые двигатели. Цикл Карно и его КПД

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла):

$$\eta = A/Q_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1,$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой;

Q_2 – количество теплоты, отданное системой;

A – работа, совершаемая за цикл

Термический коэффициент полезного действия цикла Карно:

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1 = 1 - T_2/T_1,$$

где T_1 и T_2 - соответственно термодинамические температуры нагревателя (теплоотдатчика) и холодильника (теплоприемника)

12.4 Второй закон термодинамики. Неравенство Клаузиуса. Энтропия

Неравенство Клаузиуса: $\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0$

Полный дифференциал энтропии: $dS = \delta Q/T$

Дифференциал энтропии идеального газа:

$$dS = (C_v dT/T + RdV/V)m/M;$$

$$dS = (C_P dT/T - Rdp/p)m/M;$$

$$dS = (C_P dV/V + C_v dp/p)m/M.$$

Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\partial Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \int_1^2 \frac{\partial A}{T}.$$

Изменение энтропии в процессах идеального газа:

$$p = const \quad S_{12} = S_2 - S_1 = (C_v \ln T_2/T_1 + R\ln V_2/V_1)m/M;$$

$$T = const \quad S = (mR\ln V_2/V_1)/M = (mR\ln p_2/p_1)/M$$

$$V = const \quad S = (mC_v \ln T_2/T_1)/M = (mC_V \ln p_2/p_1)/M$$

$$Q = 0 \qquad S = const$$

Изменение энтропии системы: $\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$,

где ΔS_i - изменение энтропии i–й компоненты

Формула Больцмана для энтропии: $S = k \ln w$S w – термодинамическая вероятность; S – энтропия*;* k – nостоянная Больцмана
Второй закон термодинамики: *dS > 0;   ∂Q < TdS;   TdS < dU + ∂A,* где dU - изменение энергии системы; *∂A* – работа, совершаемая над системой; dS - изменение энтропии системы.

Пример 19. Двухатомный идеальный газ занимает при давлении $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па объем V_1 = 4 л, его расширяют до объема V_2 = 6 л, при этом давление падает до значения $p_2 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Процесс происходит сначала по адиабате, затем по изохоре. Определить работу сил давления газа A, изменение внутренней энергии и количество теплоты Q, поглощенной при переходе.

Условие:

$p_1 = 3{,}0 \cdot 10^5$ Па;

$p_2 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па;

V_1 = 4 л = $4{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3;

V_2 = 6 л = $6{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3;

A - ? U -? Q - ?

Решение. Газ участвует в двух процессах: а) адиабатное расширение из состояния 1 в состояние 2, при котором объем V_2, давление p – неизвестно; б) изохорный переход из состояния 2 в состояние 3. Чтобы определить характер изохорного процесса – нагревание или охлаждение – надо найти промежуточное значение давления p.

Согласно уравнению адиабаты $p_2/p_1 = (V_1/V_2)^\gamma$ (1)

Газ двухатомный, следовательно, $\gamma=(i + 2)/i =1,4$.

Таким образом $p = 3,10^5 (2/3)^{1,4} > p_2 = 1,0 \cdot 10^5$ Па.

Последнее неравенство показывает, что при изохорном переходе из состояния 2 в состояние 3 давление газа уменьшается и, следовательно, процесс 2-3 есть процесс изохорного охлаждения ($p/T = const$ при $V =const$).

Чтобы найти работу A_{12} и количество поглощенной теплоты Q_{13} при переходе из состояния 1 в состояние 3 надо рассмотреть каждый из указанных процессов отдельно. При этом

$$A_{13} = A_{12} + A_{23}, \quad Q_{13} = Q_{12} + Q_{23}.$$

Изменение внутренней энергии не зависит от процесса и в любом случае

$$U = i\, m\, R(T_2 - T_1)/2M. \quad (31)$$

Неизвестные значения T_1 и T_2 и m/M можно найти из уравнения Клапейрона - Менделеева. На участке 1- 2 количество поглощенной теплоты $Q_{12} = 0$. Работа газа A_{12} может быть определена по изменению внутренней энергии U_{12} с использованием уравнения Клапейрона – Менделеева и уравнения адиабаты. На участке 2-3 работа газа $A_{23} = 0$, количество поглощенной теплоты

$$Q_{23} = m\, C_v(T_2 - T_1)/M. \quad (2)$$

Работа газа при адиабатном процессе

$$A_{12} = - U_{12} = i\, m\, R(T_2 - T_1)/2M.$$

Используя уравнение Клапейрона – Менделеева для состояний 1 и 2 получим

$$A_{12} = i\, (p_1V_1 - p_2V_2)/2.$$

Из уравнения адиабаты

$$p = p_1\, (V_1/ V_2)^{\gamma} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Тогда $A_{12} = 450$ Дж. Учитывая, что $A_{23} = 0$, находим $A_{12} = A_{13} = 450$ Дж.

При изохорном процессе молярная теплоемкость $C_v = iR/2$. Подставляя это выражение в уравнение (32) и используя уравнение Клапейрона – Менделеева для состояний 2 и 3, получим

$$Q_{23} = i\ (p_2 V_2 – p V_2) = - 1050 \text{ Дж.}$$

Поскольку $Q_{12} = 0$, общее количество теплоты $Q_{13} = Q_{23} = = - 1050$ Дж. Знак минус показывает, что газ отдавал теплоту окружающим телам. Изменение внутренней энергии согласно (3)

$$U_{12} = i\ (p_2 V_2 – p_1 V_1)/2 = - 1050 \text{ Дж.}$$

Пример 20. Кислород, масса которого m = 200 г нагревают от температуры $t_1 = 27^0$ С до $t_2 = 127^0$ С. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давления одинаковы и близки к атмосферному.

Условие:

m = 200 г = 0,200 кг;

$T_1 = 27^0$ C = 300 K;

$T_2 = 127^0$ C = 400 K;

i = 5;

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль;

ΔS - ?

Решение. Газ подчиняется законам идеального газа, характер процесса нагрева неизвестен, но изменение энтропии системы при переходе из одного состояния в другое определяется только параметрами состояния и не зависит от характера процесса.

Найти изменение энтропии можно, рассмотрев произвольный обратимый процесс, в результате которого систему (в данном случае идеальный газ) можно перевести из состояния 1 в состояние 2 (рис.8).

На рис. 8 показаны два возможных квазистатических процесса: первый – изобарное расширение 1 –2; второй – изотермическое расширение 1 – 3 с последующим изохорным нагреванием 3- 2.

Для процесса 1 –2 $S_2 - S_1 = \int_1^2 \partial Q_p / T$ (1)

где $Q_p = m\, C_p\, dT/M$.

Для процесса 1-3-2 $S_2 - S_1 = \int_1^3 \partial Q_T/T + \int_3^2 \partial Q_V/T,$ (2)

где $\partial Q_T = \partial A = pdV$, $\partial Q_V = mC_V dT/M$.

Найдем изменение энтропии, рассматривая изобарный процесс 1-2. При изобарном процессе молярная теплоемкость C_P = const = (i + 2)R/2. Подставляя выражение Q_P под знак интеграла равенства (33) и учитывая постоянство C_P, получим

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m(i+2)R}{M}\frac{dT}{T} = m(i+2)R\ln(T_2/T_1)/2M = 52 \text{ Дж/К}.$$

Результат не изменится и при переходе 1-3-2. Подставляя выражения Q_T и Q_V в (34) и учитывая, что при изотермическом процессе $p = p_1 V_1/V = mRT_1/MV$ получим

$$S_2 – S_1 = mR\ln(V_2/V_1)/M + mC_V\ln(T_2/T_1)/M.$$

Учитывая, что $T_2 = T_1$, $V_3 = V_2$, а также $T_2/T_1 = V_2/V_!$, получим

$$S_2 – S_1 = m(i + 2)R\ln(T_2/ T_1)/2M = 52 \text{ Дж/К}.$$

ЗАДАЧИ

111. Газ, совершающий цикл Карно, КПД которого η = 25%, при изотермическом расширении производит работу A_1 = 240 Дж. Какова работа A_2, совершаемая газом при изотермическом сжатии.

112. Многоатомный идеальный газ совершает цикл Карно, при этом в процессе адиабатического расширения объем газа увеличивается в k = 4 раза. Определить термический КПД цикла.

113. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя T_1 = 470 К, а температура холодильника T_2 =280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу А = 100 Дж. Определить термический КПД цикла, а также количество теплоты Q_1, которое газ отдает холодильнику при изотермическом сжатии.

114. Наименьший объем газа, совершающего цикл Карно, равен V_1 = 150 л. Определить наибольший объем V_3, если объемы в конце изотермического расширения и в конце изотермического сжатия равны соответственно V_2 = 600 л и V_4 = 189 л.

115. Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя T_1 = 327^0 С. Определить КПД цикла и температуру T_2 холодильника тепловой машины, если за счет Q_1 = 2 кДж теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу А = 400 Дж.

116. Во сколько раз необходимо увеличить объем ν = 5 моль идеального газа при изотермическом расширении, если его энтропия увеличилась на S = 57,6 Дж/К?

117. При нагревании двухатомного идеального газа (ν = 3 моль) его термодинамическая температура увеличилась в k = 2 раза. Определить изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно.

118. Идеальный газ (ν = 2 моль) сначала изобарно нагревали, так что объем увеличился в n = 2 раза, а затем изохорно охладили, так что давление его уменьшилось в k = 3 раза. Определить приращение энтропии в ходе указанных процессов.

119. Азот массой m = 28 г (M = $28\cdot10^{-3}$ кг/моль) адиабатически расширили в n = 2 раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема. Определить изменение энтропии S газа в ходе указанных процессов.

120. Водород массой m = 100 г (M = $2\cdot10^{-3}$ кг/моль) был изобарически нагрет так, что объем его увеличился в n = 4 раза, затем водород был изохорически охлажден так, что давление его уменьшилось в k = 3 раза. Найти изменение энтропии в ходе указанных процессов